Sur l'intégrabilité (très) formelle d'une partie des équations de la platitude des systèmes de contrôle

David Avanessoff, Laurent Baratchart, Jean-Baptiste Pomet

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Sur l'intégrabilité (très) formelle d'une partie des équations de la platitude des systèmes de contrôle

David Avanessoff — Laurent Baratchart — Jean-Baptiste Pomet

N° 5045 – version 2

version initiale decembre 2003 – version révisée juin 2004

Thème NUM

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Sur l'intégrabilité (très) formelle d'une partie des équations de la platitude des systèmes de contrôle

David Avanessoff* , Laurent Baratchart† , Jean-Baptiste Pomet‡

Thème NUM — Systèmes numériques
Projet MIAOU

Rapport de recherche n° 5045 – version 2§— version initiale decembre 2003 — version révisée juin 2004 78 pages

Résumé : Le but de cette note est d'introduire des outils d'analyse pour certains systèmes d'équations différentielles (EDP) dont ni l'ordre ni le nombre de variables indépendantes n'est fixé à l'avance. La motivation est l'étude de la "platitude" des systèmes de contrôle, ou plus généralement de la possibilité de paramétrer les solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires sous-déterminé par un certain nombre de fonctions du temps arbitraires.

Mots-clés : Intégrabilité formelle, platitude, linéarisation dynamique, problème de Monge

* `David.Avanessoff@sophia.inria.fr`
† `Laurent.Baratchart@sophia.inria.fr`
‡ `Jean-Baptiste.Pomet@sophia.inria.fr`
§ Petites corrections diverses

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 —Télécopie : +33 4 92 38 77 65

On (very) formal integrability of a partial equations for flatness of control systems

Abstract: In this note, we define some tools for analyzing some overdetermined systems of PDEs for which neither the number of independent variables nor the order are fixed a priori. Studying the so called "flatness" property of control system, which is very similar to the "Monge problem" for underdetermined systems of ODEs, was the motivation.

Key-words: Formal integrability, flatness, dynamic feedback linearization, Monge problem

Table des matières

Introduction

Le but de cette note est d'introduire des outils d'analyse pour certains systèmes d'équations différentielles (EDP) dont ni l'ordre ni le nombre de variables indépendantes n'est fixé à l'avance. La motivation est l'étude de la "platitude" des systèmes de contrôle, ou plus généralement de la possibilité de paramétrer les solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires sous-déterminé par un certain nombre de fonctions du temps arbitraires.

La rédaction est didactique. Certains arguments peuvent paraître très élémentaires. On ne trouvera ici de bibliographie exhaustive ni du point de vue de l'Automatique ni du point de vue des systèmes différentiels. Nous remercions le lecteur attentif de nous faire part de toutes ses remarques, d'ordre bibliographique, technique, ou du point de vue de l'exposition.

Rappelons qu'un système de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$) est *plat* [8] si et seulement si il existe m fonctions $h_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{(K+1)m} \to \mathbb{R}$ pour un certain $K \in \mathbb{N}$:

$$h_i(x,u,\dot{u},\ddot{u},\ldots,u^{(K)}) \ , \ 1 \leq i \leq m \ ,$$

et des "formules" qui donnent la solution générale $(x(t),u(t))$ en fonction de ces fonctions et de leurs dérivées.

On ne sait pas estimer l'entier K a priori. Les objets recherchés (les h_i) sont donc par nature des fonction d'un nombre fini de variable prises parmi un ensemble infini de variables. Il est courant dans la théorie géométrique des équations différentielles [12, 3] de voir ces objets comme des fonctions "lisses" sur des espaces de jets infinis. Ce point de vue a été adopté en contrôle pour l'étude de la platitude [18, 9, 6]. Vu que notre ambition se limite à un étude *locale*, autour d'un jet donné, du problème de l'existence de sorties "plates", on choisit un cadre plus restreint que celui des fonctions "lisses" sur des espaces de jets infinis : on se contente de leurs germes en un point, c'est-à-dire des séries formelles (convergentes dans le cas analytique, mais on n'ira pas jusque là), dont le nombre d'indéterminées n'est pas fixé a priori.

Le chapitre I de cette note est consacré à des préliminaires sur les séries formelles en un nombre fini d'indéterminées prises dans un ensemble infini (on appelle *très formelles* les séries qui sont autorisées à dépendre d'une infinité d'indéterminées). Le but est de fixer les notions et notations utilisées par la suite.

Le chapitre II définit un anneau différentiel, dont les éléments sont des séries formelles au sens du chapitre I, associé à un système de contrôle $\dot{x} = f(x,u)$, et un certain nombre de structures algébriques afférentes. Ce chapitre ne contient rien d'essentiellement nouveau.

Le chapitre III introduit une valuation, et donc une filtration, sur cet anneau et les autres structures algébriques introduites précédemment. Cette valuation est intrinsèque au système de contrôle. A la connaissance des auteurs, cette construction est nouvelle. On n'a du moins pas su trouver trace de construction semblable dans la littérature.

Le chapitre IV utilise cette valuation pour analyser une partie des équations qui régissent l'existence des fonctions h_i évoquées plus haut. On établit un résultat qui équivaut à l'intégrabilité formelle de ces équations, en un sens insuffisant pour garantir l'existence de "vraies" solutions qui ne dépendraient que d'un nombre fini de variables; on appelle donc cette propriété "intégrabilité très formelle".

Ce dernier résultat est en lui-même un peu abstrait. On aurait bien sûr préféré un résultat inverse, c'est-à-dire au moins exhiber des cas où les équations en question n'ont même pas de solutions "très formelle", ce qui aurait donné la preuve que les systèmes correspondants ne sont *pas* plats.

Les auteurs sont convaincus que la valuation introduite ici est tout de même un outil important utile (et nouveau dans ce contexte) pour l'étude locale de systèmes d'EDPs dont le nombre de variables indépendantes n'est pas fixé à priori. Le présent rapport n'apporte pas de confirmation concrète à cette conviction. Toutefois, même si nous n'avons pas d'exemple précis à exhiber, il semble que cette valuation, conjuguée aux résultats de [6] (qui, pour faire bref, permet d'écrire des équations supplémentaires sur les objets recherchés) permet de montrer que certaines classes de systèmes ne sont pas plats.

Chapitre I

Séries formelles d'un nombre fini de variables prises dans un ensemble infini

Les propriétés des anneaux de séries formelles sont par exemple décrites en détails dans [20, Chap. VII, §1]. Reprenons une partie de cet exposé pour l'adapter au cas des séries "en un nombre fini de variables choisies parmi un ensemble infini", que nous manipulerons par la suite

Ce chapitre introduit des notions dans un cadre général, plutôt que d'utiliser les notations spécifiques des chapitres suivants. La raison est double: d'une part l'exposé nous semble plus clair de cette manière, et d'autre part les objets introduits ici sont utilisées ensuite dans plusieurs contextes (certes semblables). *Afin de rendre plus aisé le lien entre l'exposé général de ce chapitre et l'utilisation qui en est faite ensuite, on introduit les situations à venir comme des exemples. Voir pages 9, 17 et 20 (en caractères penchés).*

Dans ce chapitre, $k = \mathbb{R}$, ou $k = \mathbb{C}$.

I-1 Généralités sur les séries formelles

Pour F un ensemble fini (N son cardinal, $F = \{X_1, \ldots, X_N\}$), dont on appelle les éléments des *indéterminées*. On note $k[[F]]$ ou $k[[X_1, \ldots, X_N]]$ l'anneau des **séries formelles en N indéterminées** à coefficients dans k. Un élément g de

$k[[X_1,\dots,X_N]]$ est défini par la donnée d'une famille $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^N}$ d'éléments $a_\alpha \in k$, et il est noté

$$g \;=\; \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^N} a_\alpha\, X^\alpha \tag{I.1}$$

avec, par convention, si $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N)$, $X^\alpha = {X_1}^{\alpha_1}\cdots {X_N}^{\alpha_N}$. La notation X_i désigne à la fois un élément de F et la série dont tous les coefficients sont nuls sauf $a_{(0\dots,1,\dots,0)}$, qui vaut 1. Pour chaque $q\in\mathbb{N}$, l'**ensemble homogène de degré q** de g est soit zéro soit un polynôme homogène de degré q :

$$g_q \;=\; \sum_{|\alpha|=q} a_\alpha\, X^\alpha \tag{I.2}$$

avec la notation

$$|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_N\ .$$

On écrit aussi $g=\sum_{q\in\mathbb{N}} g_q$. On appelle $g_0\in k$ le **terme constant** de la série g. On notera aussi $g(0)$ au lieu de g_0.

L'addition des séries se fait terme à terme et la multiplication selon la formule classique

$$\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} f_q\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} g_q\right) = \sum_{q\in\mathbb{N}} h_q \quad \text{avec} \quad h_q = \sum_{i+j=q} f_i g_j\ . \tag{I.3}$$

Ceci fait de $k[[F]]$ un anneau commutatif, dont le sous-anneau des séries "constantes" est identifié à k.

La série (I.1) est une **série convergente** si et seulement si il existe des nombres réels positifs ρ et μ tels que $|a_\alpha| < \mu\,\rho^{-|\alpha|}$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^N$.Les séries convergentes forment un sous-anneau, que l'on note en général $k\{X_1,\dots,X_N\}$, ou $k\{F\}$, mais que nous préférerons noter $k[[X_1,\dots,X_N]]_{cv}$ ou $k[[F]]_{cv}$. De toute façon, nous nous préoccupons peu de convergence dans cette note !

Bien sûr, si F et G sont deux ensembles finis avec $F\subset G$, il existe une inclusion naturelle $k[[F]]\subset k[[G]]$ qui identifie une série en des éléments de F avec une série en des éléments de G dont tous les coefficients de monômes contenant des puissances non nulles d'éléments de $G-F$ sont nuls. Sa restriction à $k[[F]]_{cv}$ donne une inclusion naturelle $k[[F]]_{cv}\subset k[[G]]_{cv}$.

Par convention, $k[[\varnothing]]_{cv} = k[[\varnothing]] = k$.

I-2 Le cas d'une infinité d'indéterminées

I-2.1 Séries formelles

Soit maintenant un ensemble S, non nécessairement fini. On peut définir $k[[S]]$, dont les éléments sont des **séries en un nombre fini**[1] **d'éléments de** S. Tout $g \in k[[S]]$ peut être vu comme un élément de $k[[F]]$ où F est une certaine partie finie de S, et alors aussi, d'après le paragraphe précédent, comme un élément de $k[[G]]$ pour toutes les parties finies G de S qui contiennent F. Si F et G sont finis, et $F \subset G \subset S$, on peut donc considérer que $k[[F]] \subset k[[G]] \subset k[[S]]$, et en admettant cette inclusion, on a

$$k[[S]] \;=\; \bigcup_{F \subset S,\ F\,\text{fini}} k[[F]]\ .$$

En termes plus savants, $k[[S]]$ est la limite projective des $k[[F]]$ pour $F \subset S$ fini.

> *Exemple.* *Soient m et n deux entiers.*
> *Au chapitre II, on utilisera deux ensembles d'indéterminées, qui jouent le rôle de S :*
>
> - *Υ contient les indéterminées $x_1, \ldots ,x_n$, $u_1, \ldots ,u_m$ ainsi que les $u_j^{(k)}$ pour $j \in \{1, \ldots ,m\}$ mais pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,*
> - *Ξ contient en plus tous les $x_i^{(k)}$ pour tout entier k.*
>
> *$u_j^{(k)}$ et $x_i^{(k)}$ jouent le rôle de la $k$ième dérivée par rapport au temps de la $j$ième commande et de la $i$ième coordonnée de l'état respectivement, mais considérés comme des indéterminées indépendantes.*
> *Au chapitre III, on utilisera un autre ensemble d'indéterminées*
> *$\mathbf{Y} = \{y_j^k\}_{j\in\{1,\ldots,m\},\,k\in\mathbb{N}}$ comme "coordonnées adaptées".*
> *Dans tous les cas, il y a une infinité d'indéterminées, mais on ne veut considérer que les fonctions (ou les séries formelles) qui ne dépendent que d'un nombre fini d'entre elles.*

On peut aussi définir le sous-anneau $k[[S]]_{cv}$ composé des éléments de $k[[S]]$ qui, en tant que séries d'un nombre fini de variables, sont convergentes. On a aussi

$$k[[S]]_{cv} \;=\; \bigcup_{F \subset S,\ F\,\text{fini}} k[[F]]_{cv}\ .$$

On va maintenant cesser de mentionner le cas convergent.

1. A la section I-2.2, on évoque aussi l'anneau $k[[[S]]]$ des séries en une infinité de variables.

Pour $X \in S$, on note aussi X la série $X \in k[[\{X\}]] \subset k[[S]]$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui du monôme X, qui vaut 1.

Tout $g \in k[[S]]$ peut s'écrire symboliquement

$$g \quad = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^S_{\text{fini}}} a_\alpha \mathbf{S}^\alpha \ , \tag{I.4}$$

où

- un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^S_{\text{fini}}$ est, par définition, une application $\alpha : S \to \mathbb{N}$ telle que seul un nombre fini de $\alpha(X)$ sont non nuls, c'est-à-dire telle que

$$\{X \in S, \alpha(X) > 0\} \text{ est un sous-ensemble fini de } S \tag{I.5}$$

  (sous-ensemble qui dépend bien sûr de α),
- $a_\alpha \in k$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^S_{\text{fini}}$,
- $\mathbf{S}^\alpha$ est une notation pour

$$\mathbf{S}^\alpha \quad = \quad \prod_{X \in S} X^{\alpha(X)} \ , \tag{I.6}$$

- le fait que $g \in k[[F]]$ pour un certain ensemble fini $F \subset S$ se traduit par la propriété suivante, vraie pour tout multi-indice α,

$$\Big(\exists X,\ X \in S\,,\ X \notin F \text{ et } \alpha(X) \neq 0\Big) \quad \Rightarrow \quad a_\alpha = 0\ . \tag{I.7}$$

On peut bien sûr toujours décomposer la somme symbolique (I.4) en ensembles homogènes comme en (I.1)-(I.2). Chaque ensemble homogène est soit zéro soit un polynôme homogène en un nombre fini de variables choisi parmi l'ensemble S. Notons que l'espace des ensembles homogènes de degré q n'est un espace vectoriel de dimension finie que si S est fini.

$k[[S]]$ est un anneau commutatif, où les opérations se font entre séries d'un nombre fini de variables : si $g,h \in k[[S]]$, alors il existe des parties finies G et H de S telles que $g \in k[[G]]$ et $h \in k[[H]]$, et l'on fait la somme et le produit en considérant h et g comme des éléments de $k[[G \cup H]]$. Le résultat suivant est une conséquence de [20, Chap. VII,§1, Th. 2] et du fait que si deux éléments f et g de $k[[S]]$ sont tels que $fg = 1$ et si f est dans $k[[F]]$, avec $F \subset S$ fini, alors nécessairement $g \in k[[F]]$:

Proposition I.1 *$g \in k[[S]]$ est inversible si et seulement si son terme constant $g(0)$ (cf. (I.1)-(I.2)) est non nul.*

L'ensemble des éléments non inversibles de $k[[S]]$ est donc l'idéal des séries dont le terme constant est nul, c'est-à-dire l'idéal $\mathcal{M}$ engendré par les séries X pour $X \in S$, qui est l'unique idéal maximal de $k[[S]]$.

L'anneau $k[[S]]$ est Noethérien si S est fini d'après [20, Chap. VII, Théorème 5]. Si S est infini, il n'est pas noethérien car l'idéal $\mathcal{M}$ ne peut être engendré par un nombre fini d'éléments. En revanche, le Théorème de préparation de Weierstrass reste vrai :

Théorème I.2 *(Théorème de préparation de Weïerstraß) Soit $f \in k[[S]]$ une série* non inversible *et* régulière par rapport à *un certain $X \in S$, c'est à dire que $f \in k[[F]]$ pour un certain F fini, $X \in F \subset S$, et que dans l'écriture (I.1), il y a au moins un terme aX^h avec $a \neq 0$; appelons $s(\geq 1)$ le plus petit exposant h ayant cette propriété. Alors, pour tout $G \subset S$ fini et tout $g \in k[[G]] \subset k[[S]]$, il existe $u \in k[[F \cup G]]$ et s autres séries formelles r_i ($0 \leq i \leq s-1$), avec la propriété que $r_i \in k[[(F \cup G) - \{X\}]]$, telles que :*

$$g = u\, f + \sum_{i=0}^{s-1} X^i\, r_i \; .$$

Les séries formelles u et r_i sont définies de manière unique dans $k[[S]]$ par la donnée de g et f.

C'est une conséquence simple de [20, Chap. VII, Théorème 5] car tout se passe dans $k[[F \cup G]]$, qui est un anneau de séries formelles en un nombre fini d'indéterminées. Notons que ce théorème reste vrai pour des séries convergentes (voir les remarques pages 141 à 145 de [20, Chap. VII, §1]). On utilisera le corollaire suivant de ce théorème :

Corollaire I.3 *Soient F un sous-ensemble fini de S, η un entier positif, $f_1, \ldots, f_\nu \in k[[F]] \subset k[[S]]$, et $X_1, \ldots, X_\nu$ des éléments non inversibles distincts de F tels que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, \nu\}, \quad f_i = X_i + \widetilde{f_i}$$

avec $\widetilde{f_i} \in k[[F - \{X_i\}]] \subset k[[F]] \subset k[[S]]$. Alors, pour tout $h \in k[[F]] \subset k[[S]]$, il existe d'uniques $u_i \in k[[F]]$ et $r \in k[[F - \{X_1, \ldots, X_\nu\}]]$, telles que :

$$h = \sum_{i=1}^{\nu} u_i\, f_i + r \; .$$

Étant donnés les f_i et h, il n'existe pas d'autres $u \in k[[S]]$ et $r \in k[[S - \{X_1, \ldots, X_\nu\}]]$ que ceux-ci.

Il suffit d'appliquer ν fois le théorème, avec $s = 1$, $a = 1$, $f = f_i$ et $F = G = F \cup G$.

I-2.2 Séries très formelles

On peut se demander pourquoi se restreindre aux séries ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'indéterminées prises dans l'ensemble infini S. Une bonne raison pour cela est que le problème qui nous intéresse (voir chapitre IV) se pose en terme de fonctions, ou de séries, d'un nombre *fini* de variables.

Il va tout de même être commode d'utiliser à l'occasion l'ensemble des séries d'une infinité de variables. On appellera un tel objet une **série très formelle**. Une série très formelle est donnée par une somme symbolique (I.4), où l'on ne demande plus qu'il existe un ensemble fini $F \subset S$ tel que (I.7) soit satisfait, c'est-à-dire que tous les coefficients a_α peuvent être non nuls; en revanche, les monômes restent des produits finis, c'est-à-dire que les multi-indices α continuent de ne courir que sur $\mathbb{N}^S_{\text{fini}}$, ensemble des α qui vérifient (I.5).

La somme de deux séries très formelles se calcule en additionnant deux à deux les coefficients des mêmes monômes, et l'on peut vérifier aisément que chaque coefficient du produit de deux séries très formelles est une somme finie de produits de coefficients des deux séries en question. On note $\boldsymbol{k}[[[\boldsymbol{S}]]]$ l'anneau des séries très formelles en les éléments de S.

On ne cherche pas à donner un sens à la convergence de telles séries.

I-3 Structure linéaire tangente

I-3.1 Dérivées partielles

Pour $g \in k[[S]]$, donné par (I.4), et $X \in S$ on définit la dérivée partielle de g par rapport à X comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial X} &= \sum_{\beta \in \mathbb{N}^S_{fini}} b_\beta \, \mathbf{S}^\beta \\ \text{avec} \quad & b_\beta = (\beta(X)+1)\, a_{\beta+\epsilon_X}, \end{aligned} \tag{I.8}$$

le multi-indice ϵ_X étant défini par $\epsilon_X(X) = 1$ et $\epsilon_X(Y) = 0$ pour $Y \neq X$.

Rappelons que, par définition de $k[[S]]$, il existe, pour chaque g, un ensemble fini $F \subset S$ tel que $g \in k[[F]]$. Pour $X \in S$, on a bien

$$X \notin F \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial X} = 0 \ , \tag{I.9}$$

c'est-à-dire que si g "ne dépend pas de X", sa dérivée partielle par rapport à X est bien nulle. Formellement, (I.9) découle de la définition (I.8) car $(\beta+\epsilon_X)(X)$ vaut au moins 1 pour chaque β, si bien que, d'après (I.7) tous les b_β sont nuls si $X \notin F$.

Par ailleurs, si $X \in F$, la définition est bien la définition classique de la dérivée partielle d'une série en un nombre fini d'indéterminées par rapport à l'un de ces indéterminées.

On vérifie aisément que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial X} : \; k[[S]] & \to & k[[S]] \\ g & \mapsto & \dfrac{\partial g}{\partial X} \end{array}$$

est une k-dérivation, c'est-à-dire qu'elle est nulle sur k, qu'elle est linéaire pour la structure de k-espace vectoriel, et que $\partial(gh)/\partial X = g\,\partial h/\partial X + h\,\partial g/\partial X$.

I-3.2 Module des différentielles, dérivations

La construction de la "dérivation universelle" d d'un anneau quelconque dans son module des "différentielles de Kähler" est faite par exemple dans [14, chapitre XIX, §3], voir aussi [11] pour le cas d'un anneau différentiel. La construction étant plus directe dans notre cas d'un anneau de séries formelles, donnons la explicitement.

Soit $\Lambda^1(k[[S]])$ le $k[[S]]$-module libre engendré par les éléments de S, ou plutôt, ce qui revient formellement au même, par les éléments d'un ensemble $\mathrm{d}S$, qui est en bijection avec S (on note $\mathrm{d}X$ l'image de X par cette bijection) :

$$\Lambda^1(k[[S]]) \;=\; \bigoplus_{Y \in \mathrm{d}S} k[[S]]\,Y \;=\; \bigoplus_{X \in S} k[[S]]\,\mathrm{d}X\ , \tag{I.10}$$

et la k-dérivation

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d} : \; k[[S]] & \to & \Lambda^1(k[[S]]) \\ g & \mapsto & \displaystyle\sum_{X \in S} \frac{\partial g}{\partial X}\,\mathrm{d}X \end{array} \tag{I.11}$$

(cette somme est en réalité finie).

A une application quelconque $\delta : S \to k[[S]]$, on associe

$$\begin{array}{rcl} D_\delta : \; k[[S]] & \to & k[[S]] \\ g & \mapsto & \displaystyle\sum_{X \in S} \delta(X)\frac{\partial g}{\partial X} \end{array} \tag{I.12}$$

(pour tout $g \in k[[S]]$, cette somme est en réalité finie puisque $\frac{\partial g}{\partial X}$ est nul sauf pour X dans une partie finie de S). Il est facile de vérifier de D_δ est une k-dérivation, et que, réciproquement, toute k-dérivation $D : k[[S]] \to k[[S]]$ est de la forme D_δ, en définissant, $\delta(X)$, pour tout $X \in S$, comme étant égal à $D(X)$, où l'on considère X comme un élément de $k[[S]]$.

Cette remarque entraîne que toute k-dérivation $D : k[[S]] \to M$ où M est un $k[[S]]$-module peut s'écrire $D = L \circ d$ où $L : \Lambda^1(k[[S]]) \to M$ est $k[[S]]$-linéaire (c'est-à-dire est un homomorphisme de $k[[S]]$-modules). $\mathrm{d} : k[[S]] \to \Lambda^1(k[[S]])$ est donc la dérivation universelle décrite dans [14, chap XIX, §3], et $\Lambda^1(k[[S]])$ est le module des différentielles ("différentielles de Kähler" dans [11]), habituellement noté $\Omega^1_{k[[S]]\,/\,k}$.

I-3.3 Algèbre extérieure, lemme de Poincaré

$\Lambda^1(k[[S]])$ étant un module sur l'anneau commutatif $k[[S]]$, on peut définir sa puissance extérieure comme dans [14, chapitre XIX, §1] et on note, pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\Lambda^j(k[[S]]) \;\; = \;\; \bigwedge^j \left(\Lambda^1(k[[S]])\right) \; .$$

Le symbole $\wedge$ désigne le produit extérieur entre deux formes. Pour tout $r,s \in \mathbb{N}$,

$$\wedge \; : \; \begin{array}{ccc} \Lambda^r(k[[S]]) \times \Lambda^s(k[[S]]) & \to & \Lambda^{r+s}(k[[S]]) \\ (\eta,\xi) & \mapsto & \eta \wedge \xi \end{array}$$

est une application $k[[S]]$-bilinéaire. En plus de cette distributivité, $\wedge$ est associatif et vérifie, pour $\eta \in \Lambda^r(k[[S]])$ et $\xi \in \Lambda^s(k[[S]])$, la propriété d'alternance

$$\eta \wedge \xi = (-1)^{rs} \xi \wedge \eta \; .$$

La $r$ième puissance extérieure d'un module libre est aussi un module libre. On peut, comme en [14, page 734], construire une base de $\Lambda^r(k[[S]])$ à partir d'une base du $k[[S]]$-module libre $\Lambda^1(k[[S]])$: si $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in J}$ est une base du $k[[S]]$-module $\Lambda^1(k[[S]])$, où J est un ensemble muni d'un ordre total, alors une base du $k[[S]]$-module $\Lambda^r(k[[S]])$ est donnée par

$$\{\, \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r \,\}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in J^r \,,\; \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r} \; . \tag{I.13}$$

En particulier, puisque $(\mathrm{d}X)_{X \in S}$ est une base de $\Lambda^1(k[[S]])$, si l'on choisit un ordre total sur S, une base de $\Lambda^r(k[[S]])$ est donnée par

$$\{\, \mathrm{d}X_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}X_r \,\}_{(X_1,\ldots,X_r) \in S^r \,,\; X_1 < X_2 < \cdots < X_r} \; . \tag{I.14}$$

Ainsi tout $\eta \in \Lambda^r(k[[S]])$ s'écrit de manière unique

$$\eta \;=\; \sum_{\substack{(X_1,\ldots,X_r)\in S^r\\ X_1<X_2<\,\cdots\,<X_r}} a_{(X_1,\ldots,X_r)}\,\mathrm{d}X_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}X_r \tag{I.15}$$

avec $a_{(X_1,\ldots,X_r)} \in k[[S]]$ pour tout $(X_1,\ldots,X_r)$.

Pour tout $r\in\mathbb{N}$, la différentielle extérieure

$$\mathrm{d}\;:\;\Lambda^r(k[[S]])\;\to\;\Lambda^{r+1}(k[[S]])$$

associe à tout $\eta\in\Lambda^r(k[[S]])$ donné par (I.15) la forme de degré $r+1$:

$$\mathrm{d}\eta = \sum_{\substack{(X_1,\ldots,X_r)\in S^r\\ X_1<X_2<\,\cdots\,<X_r}} \mathrm{d}a_{(X_1,\ldots,X_r)}\wedge\mathrm{d}X_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}X_r \quad\in\quad \Lambda^{r+1}(k[[S]])\;.$$

Le lemme de Poincaré est valable dans les séries formelles, c'est-à-dire que :

Proposition I.4 (Lemme de Poincaré) *Pour tout entier $j\geq 1$ et toute j-forme $\omega\in\Lambda^j(k[[S]])$ telle que $\mathrm{d}\omega = 0\in\Lambda^{j+1}(k[[S]])$, il existe $\eta\in\Lambda^{j-1}(k[[S]])$ telle que $\omega=\mathrm{d}\eta$.*

Le fait que S soit infini ne change rien à la preuve de cette proposition : une forme ω ne fait intervenir qu'un nombre fini de variable, et l'on peut appliquer le résultat bien connu pour les séries formelle en ce nombre fini d'indéterminées.

En d'autres termes, le complexe de de Rahm

$$k[[S]] \;\overset{\mathrm{d}}{\to}\; \Lambda^1(k[[S]]) \;\overset{\mathrm{d}}{\to}\; \Lambda^2(k[[S]]) \;\overset{\mathrm{d}}{\to}\; \Lambda^3(k[[S]]) \;\overset{\mathrm{d}}{\to}\; \cdots\;\cdots \tag{I.16}$$

est exact.

Comme chaque $k[[S]]$-module $\Lambda^j(k[[S]])$ est engendré (librement) par des éléments de la forme $\mathrm{d}\eta$ avec $\eta\in\Lambda^{j-1}(k[[S]])$, on peut étendre toute dérivation D : $k[[S]]\to k[[S]]$ (voir (I.12)) en une dérivation $D:\Lambda^j(k[[S]])\to\Lambda^j(k[[S]])$ qui "commute avec" la différentielle extérieure, c'est-à-dire que, pour tout $\eta\in\Lambda^{j-1}(k[[S]])$, on a $\mathrm{d}\,(D\eta) = D\,(\mathrm{d}\eta)\in\Lambda^j(k[[S]])$. Cette dérivation est une classique "dérivée de lie".

On considère aussi l'algèbre extérieure $\Lambda(k[[S]])$ définie par

$$\Lambda(k[[S]]) = \bigoplus_{i=0}^{\infty}\Lambda^i(k[[S]]). \tag{I.17}$$

Un élément quelconque de $\Lambda(k[[S]])$ est une somme "symbolique" de formes de différents degrés. Seules les formes homogènes, c'est-à-dire les sommes symboliques dont un seul terme est non nul ont un sens concret. L'intérêt d'introduire cette somme abstraite est que le produit extérieur devient une multiplication interne, faisant de $\Lambda(k[[S]])$ une $k[[S]]$-algèbre, et l'on peut étendre $\mathrm{d} : \Lambda(k[[S]]) \to \Lambda(k[[S]])$ (dérivation extérieure, qui fait augmenter le degré des formes différentielles de 1), ainsi que toute dérivation $D : k[[S]] \to k[[S]]$ en une dérivation $D : \Lambda^j(k[[S]]) \to \Lambda^j(k[[S]])$, qui commute avec d et préserve le degré des formes différentielles.

I-4 "Ordre" d'une série formelle

I-4.1 Poids des indéterminées

Il est classique —cf. [20, Chap. VII, §1]— de définir l'ordre d'une série comme étant le degré de l'ensemble homogène non nul de plus bas degré ($+\infty$ pour la série nulle). On va reprendre ceci, mais en comptant les différentes variables avec des poids différents. On suppose donné un ensemble S, et une application **poids**:

$$\pi \;:\; S \to \mathbb{N} - \{0\}$$

Le poids "classique" est celui défini par $\pi(X) = 1$ pour tout X. C'est celui qui est implicitement utilisé usuellement, y compris précédemment quand on parle de degré. Ce n'est pas celui qui nous intéressera le plus.

Définition I.5 *On dira que le* ***poids*** π *est* ***gros*** *si et seulement si, pour tout entier* j*, l'ensemble*

$$S_{[\leq j]} \;=\; \{X \in S\,,\, \pi(X) \leq j\} \qquad \text{est fini.} \tag{I.18}$$

Si S est fini, tous les poids sont gros. Si S est infini, le poids "classique" n'est évidement pas gros. Il existe des poids gros sur S si et seulement si S est dénombrable.

A l'aide du poids π, on définit, pour tout multi-indice[2] α, la grandeur

$$|\alpha|_\pi = \sum_{X \in S} \pi(X)\alpha(X)\;, \tag{I.19}$$

qui coïncide avec le traditionnel $|\alpha| = \sum_{X \in S} \alpha(X)$ si π est le poids "classique".

2. Les multi-indices ont été introduits en (I.4)-(I.6). Un multi-indice $\alpha : S \to \mathbb{N}$ associe à chaque indéterminée un entier $\alpha(X)$, qui est son exposant dans le monôme correspondant; tout multi-indice vérifie (I.7), c'est-à-dire que seul un nombre fini parmi les $\alpha(X)$ sont non nuls.

I-4.2 Polynômes homogènes

Définition I.6 *Soit $q \in \mathbb{N}$. Une série $g \in k[[S]]$, écrite symboliquement comme en (I.4), est un* **polynôme homogène de degré q** *si $g \neq 0$ et $a_\alpha = 0$ pour tout α tel que $|\alpha|_\pi \neq q$. On note $k[S]^{[q]}$ le k-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré q, auxquels on rajoute zéro.*

Si S est infini, le k-espace vectoriel $k[S]^{[q]}$ est en général infinie ; c'est par exemple le cas pour le poids "classique". Ici intervient l'intérêt des poids "gros" (cf. Définition I.5) : un polynôme homogène de degré q appartient forcément à $k[[S_{[\leq q]}]] \subset k[[S]]$ ($S_{[\leq q]}$ est défini en (I.18)) car, si $X \notin S_{[\leq q]}$ et $\alpha(X) > 0$, on a forcément (cf. (I.19)) $|\alpha|_\pi > q$. Si le poids π est gros, les polynômes homogènes sont donc des polynômes en un nombre fini de variables, homogènes au sens d'un certain poids. En particulier, on a :

Proposition I.7 *Si le poids π est gros, chaque $k[S]^{[q]}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Plus précisément, si N_q est le cardinal de l'ensemble fini $S_{[\leq q]}$; la dimension de $k[S]^{[q]}$ est égale au nombre de solutions entières $(\,\alpha(X)\,)_{X \in S_{[\leq q]}} \in \mathbb{N}^{N_q}$ de*

$$\sum_{X \in S_{[\leq q]}} \pi(X)\,\alpha(X) \quad = \quad q\,. \tag{I.20}$$

Voyons ceci sur un exemple qui sera repris dans les chapitres suivants.

<u>Exemple</u>. *Reprenons le cas où l'ensemble d'indéterminées est $S = \mathbf{Y} = \{y_j^k\}_{j \in \{1,\ldots,m\},\, k \in \mathbb{N}}$ (utilisé au chapitre III comme "coordonnées adaptées", déjà cité en exemple page 9). L'ensemble étant infini, le poids "classique" n'est pas gros. En revanche, le poids donné par*

$$\pi(y_j^k) = k + 1 \tag{I.21}$$

est gros puisque le cardinal de $S_{[\leq j]}$ est mj. De fait, les polynômes homogènes de degré q forment un k espace vectoriel qui a pour dimension le nombre de solutions entières $(\alpha_{\mu,\lambda})_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 0 \leq \lambda \leq q-1}} \in \mathbb{N}^{qm}$ de

$$\sum_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 0 \leq \lambda \leq q-1}} (\lambda + 1)\,\alpha_{\mu,\lambda} \quad = \quad q\,. \tag{I.22}$$

On note $\nu(m,q)$ ce nombre de solutions entières.

I-4.3 Ordre d'une série

On peut décomposer la somme symbolique (I.4) en :

$$g \quad = \quad \sum_{q\in\mathbb{N}} g_q \ , \quad \text{avec } g_q \in k[S]^{[q]} \ , \tag{I.23}$$

en définissant g_q, l'**ensemble homogène (pondéré) de degré q** de g par :

$$g_q \quad = \quad \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^S_{\mathrm{fini}},\, |\alpha|_\pi=q} a_\alpha\, \mathbf{S}^\alpha \ . \tag{I.24}$$

Des formules comme (I.3) restent vraies pour des poids quelconques, comme pour le poids "classique".

Définition I.8 *L'**ordre** de $g \in k[[S]]$, noté $\mathbf{o}(g)$, est le plus petit entier q tel que l'ensemble homogène (pondéré) de degré q de g (g_q dans (I.24)) soit non nul, c'est $+\infty$ si $g = 0$.*

Si g est donné par (I.4),

$$\mathbf{o}(g) \quad = \quad \min_{\alpha\in\mathbb{N}^S_{\mathrm{fini}},\, a_\alpha\neq 0} \ \sum_{X\in S} \pi(X)\alpha(X) \ . \tag{I.25}$$

Plusieurs résultats concernant l'ordre sont précisés dans [20, Chap. VII, §1]. En particulier, $\mathbf{o}$ est une *valuation* sur $k[[S]]$, c'est-à-dire que, pour tout g,h dans $k[[S]]$,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{o}(g) = +\infty \ \Leftrightarrow \ g = 0 \ , \\ \mathbf{o}(g+h) \geq \min\{\mathbf{o}(g),\mathbf{o}(h)\}, \\ \mathbf{o}(gh) = \mathbf{o}(g) + \mathbf{o}(h). \end{array}\right. \tag{I.26}$$

La propriété suivante relie l'ordre d'une série à celui de ses dérivées partielles :

Proposition I.9 *Pour $g \in k[[S]]$ tel que $g(0) = 0$, on a*

$$\mathbf{o}(f) = \min_{X\in S}\{\pi(X) + \mathbf{o}(\frac{\partial f}{\partial X})\}.$$

Démonstration : Soit $g \in k[[S]]$ donné par (I.4) tel que $g(0) = 0$, c'est-à-dire $a_0 = 0$. Pour tout $X \in S$, on définit le multi-indice ϵ_X par $\epsilon_X(Y) = \delta_{X,Y}$, où δ est le symbole de Kronecker, pour tout $Y \in S$ (autrement dit $\epsilon_X(X) = 1$ et $\epsilon_X(Y) = 0$ si $Y \neq X$). On peut alors écrire

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^S_{\text{fini}}} a_\alpha \, \alpha(X) \, \mathbf{S}^{(\alpha - \epsilon_X)} \; .$$

D'après (I.25) (issu de la Définition I.8), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{o}(g) \quad &= \quad \min_{\alpha \in \mathbb{N}^S_{\text{fini}},\, a_\alpha \neq 0} \; \sum_{Y \in S} \pi(Y)\alpha(Y) \; , \\ \mathbf{o}(\frac{\partial g}{\partial X}) \quad &= \quad \min_{\alpha \in \mathbb{N}^S_{\text{fini}},\, a_\alpha \, \alpha(X) \neq 0} \; \sum_{Y \in S} \pi(Y) \left(\alpha(Y) - \delta_{X,Y} \right) \; . \end{aligned}$$

En développant la seconde expression, on obtient

$$\mathbf{o}(\frac{\partial g}{\partial X}) + \pi(X) = \min_{\alpha \in \mathbb{N}^S_{\text{fini}},\, a_\alpha \, \alpha(X) \neq 0} \; \sum_{Y \in S} \pi(Y)\alpha(Y) \; .$$

Ceci entraîne clairement, au vu de l'expression de $\mathbf{o}(g)$, que $\mathbf{o}(\frac{\partial g}{\partial X}) + \pi(X) \geq \mathbf{o}(g)$ pour tout $X \in S$. De plus, comme $a_0 = 0$, il existe, pour tout α tel que $a_\alpha \neq 0$, un $X \in S$ tel que $\alpha(X) \neq 0$, donc l'égalité ci-dessus entraîne

$$\min_{X \in S} \left(\mathbf{o}(\frac{\partial g}{\partial X}) + \pi(X) \right) \quad = \quad \min_{\alpha \in \mathbb{N}^S_{\text{fini}},\, a_\alpha \neq 0} \; \sum_{Y \in S} \pi(Y)\alpha(Y) \quad = \quad \mathbf{o}(g) \; . \quad \blacksquare$$

I-4.4 Ordre d'une forme différentielle

On peut étendre les constructions ci-dessus à tout $\Lambda(k[[S]])$, en donnant à chaque $\mathrm{d}X$ le même poids que X.

Définition I.10 *Soit $q \in \mathbb{N}$. Une forme différentielle $\eta \in \Lambda^r(k[[S]])$, donnée par (I.15) est une r-**forme différentielle polynomiale homogène de degré** q si et seulement si $\eta \neq 0$ et*

$$\begin{aligned} \pi(X_1) + \cdots + \pi(X_r) > q \quad &\Rightarrow \quad a_{(X_1,\ldots,X_r)} = 0 \; , \\ \pi(X_1) + \cdots + \pi(X_r) \leq q \quad &\Rightarrow \quad a_{(X_1,\ldots,X_r)} \in k[S]^{[q - \pi(X_1) - \cdots - \pi(X_r)]} \; . \end{aligned} \tag{I.27}$$

On note $\Lambda^r(k[S])^{[q]}$ le k-espace vectoriel des r-forme différentielles polynomiales homogènes de degré q, auxquelles on rajoute zéro.

Comme pour les séries (I.23), on peut décomposer (I.15) en

$$\eta \;=\; \sum_{q\in\mathbb{N}} \eta_q \;, \quad \text{avec } \eta_q \in \Lambda^r(k[S])^{[q]} \;, \tag{I.28}$$

en définissant η_q, l'**ensemble homogène (pondéré) de degré q** de η qui sélectionne, dans chaque $a_{(X_1,\dots,X_r)}$ sa composante homogène de degré $q-\pi(X_1)-\cdots-\pi(X_r)$. On peut alors définir **l'ordre** de η, noté $\mathbf{o}(\eta)$, comme le plus petit q tel que η_q soit non nul ($+\infty$ si ils sont tous nuls). C'est aussi égal à

$$\mathbf{o}(\eta) \;=\; \min_{\substack{(X_1,\dots,X_r)\in S^r\\ X_1<X_2<\,\cdots\,<X_r}} \mathbf{o}\left(a_{(X_1,\dots,X_r)}\right) + \pi(X_1) + \cdots + \pi(X_r) \;. \tag{I.29}$$

La proposition I.7 est un cas particulier de la suivante :

Proposition I.11 *Si le poids π est gros, chaque $\Lambda^r(k[S])^{[q]}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.*

On ne donne pas sa dimension en général, mais seulement sur l'exemple qui nous importera.

Exemple. *Supposons, comme page 17, que $S=\mathbf{Y}=\{y_j^k\}_{j\in\{1,\dots,m\},\,k\in\mathbb{N}}$ et que le poids est donné par (I.21). Notons toujours $\nu(m,q)$ le nombre de solutions entières $(\alpha_{\mu,\lambda})_{1\le\mu\le m,\,0\le\lambda\le q-1}\in\mathbb{N}^{qm}$ de (I.22). La dimension du k-espace vectoriel $\Lambda^r(k[\mathbf{Y}])^{[q]}$ vaut, pour $r=1$ ou $r=2$,*

$$\begin{aligned}
\dim_k \Lambda^1(k[\mathbf{Y}])^{[q]} &= m\sum_{j=0}^{q-1}\nu(m,j)\;,\\
\dim_k \Lambda^2(k[\mathbf{Y}])^{[q]} &= m\sum_{j=0}^{q-2}\nu'(m,q-j)\nu(m,j)
\end{aligned} \tag{I.30}$$

où $\nu'(m,i)$ est le nombre de $\mathrm{d}y_j^k\wedge\mathrm{d}y_{j'}^{k'}$ indépendants tels que $k+k'+2=i$, c'est-à-dire

$$\nu'(m,2p+1) \;=\; m^2p\;, \qquad \nu'(m,2p) \;=\; m^2(p-1)+\frac{m(m-1)}{2}\;. \tag{I.31}$$

Introduisons enfin une notation utile. On écrira $g=h+\mathcal{O}_k$ pour dire que g et h ne diffèrent que par un terme d'ordre au moins k :

Définition I.12 (notation $\mathcal{O}$) *pour tous entiers r et q et tout g,h dans $\Lambda^r(k[S])$, l'écriture*

$$g \;=\; h\;+\;\mathcal{O}_q\;, \qquad \text{ou} \qquad g\;+\;\mathcal{O}_q \;=\; h\;+\;\mathcal{O}_q \tag{I.32}$$

signifie $\mathbf{o}(g-h) \geq q$. *En particulier,* $g = \mathcal{O}_q$ *signifie* $\mathbf{o}(g) \geq q$.

I-4.5 Lemme de Poincaré homogène

Il est facile de vérifier que nos définitions de l'ordre et des polynômes homogènes sont telle que, pour tout $r \geq 0$ la différentielle extérieure d'une r-forme différentielle polynomiale homogène de degré q (Si $r = 0$, 0-forme différentielle polynomiale signifie polynôme) est soit nulle soit une $(r+1)$-forme différentielle polynomiale homogène de degré q. Autrement dit, pour tout q, on a une restriction de (I.16) aux parties homogènes :

$$k[S]^{[q]} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \Lambda^1(k[S])^{[q]} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \Lambda^2(k[S])^{[q]} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \Lambda^3(k[S])^{[q]} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \cdots \cdots \tag{I.33}$$

Il est à noter que $\Lambda^r(k[S])^{[q]} = \{0\}$ si $r > q$ et donc la suite ci-dessus s'arrête, ce qui n'est pas le cas de (I.16). On a de plus

Proposition I.13 (Lemme de Poincaré homogène) *Pour tous entiers* r *et* q *strictement positifs, et tout* $\omega \in \Lambda^r(k[S])^{[q]}$ *tel que* $\mathrm{d}\omega = 0 \in \Lambda^{r+1}(k[[S]])$*, il existe* $\eta \in \Lambda^{r-1}(k[S])^{[q]}$ *tel que* $\omega = \mathrm{d}\eta$.

Corollaire I.14 *Pour tous entiers* r *et* q *strictement positifs, et tout* $\omega \in \Lambda^r(k[[S]])$*, si* $\mathrm{d}\omega = \mathcal{O}_q$*, alors il existe* $\eta \in \Lambda^{r-1}(k[[S]])$ *tel que* $\omega = \mathrm{d}\eta + \mathcal{O}_q$.

I-4.6 Filtration associée

Pour tout entier j, soit

$$k[[S]]_j \quad = \quad \{\, g \in k[[S]] \,, \mathbf{o}(g) \geq j \,\} \tag{I.34}$$

l'ensemble des séries d'ordre au moins j. Grâce à la propriété multiplicative (I.26) de l'ordre, il s'agit d'un idéal de $k[[S]]$. On a en fait

$$\begin{array}{l} k[[S]] \;=\; k[[S]]_0 \;\supset\; k[[S]]_1 \;\supset\; k[[S]]_2 \;\supset\; \cdots \;, \\ k[[S]]_i \, k[[S]]_j \;\subset\; k[[S]]_{i+j} \;, \\ \bigcap_{j \in \mathbb{N}} k[[S]]_j \;=\; \{0\} \;. \end{array} \tag{I.35}$$

Notons que, pour tout $g \in k[[S]]$, on a

$$\mathbf{o}(g) = j \iff g \in k[[S]]_j \text{ et } g \notin k[[S]]_{j+1} \;, \tag{I.36}$$

si bien que la donnée de $\mathbf{o}(.)$ est équivalente à la donnée des $k[[S]]_j$.

On peut aussi, pour tous entiers r et j, définir

$$\Lambda^r(k[[S]])_j \quad = \quad \{ g \in \Lambda^r(k[[S]]) \,, \mathbf{o}(g) \geq j \} \;, \tag{I.37}$$

qui est, pour les mêmes raisons, un sous $k[[S]]$-module de $\Lambda^r(k[[S]])$. On a une filtration du $k[[S]]$-module $\Lambda^r(k[[S]])$:

$$\Lambda^r(k[[S]]) \;=\; \Lambda^r(k[[S]])_0 \;\supset\; \Lambda^r(k[[S]])_1 \;\supset\; \Lambda^r(k[[S]])_2 \;\supset\; \cdots \;. \tag{I.38}$$

La proposition suivante concerne les quotients de $k[[S]]$ ou $\Lambda^r(k[[S]])$ par ces idéaux ou sous-modules, quotients qui représentent les séries "tronquées" à un ordre fini.

Proposition I.15 *Si le poids π est gros, alors pour tout entier j, l'anneau quotient $k[[S]]/\,k[[S]]_j$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, isomorphe à*

$$\bigoplus_{i=0}^{j-1} k[S]^{[i]} \;,$$

et le module quotient $\Lambda^r(k[[S]])/\,\Lambda^r(k[[S]])_j$ est aussi, pour tout r, un k-espace vectoriel de dimension finie, isomorphe à

$$\bigoplus_{i=0}^{j-1} \Lambda^r(k[S])^{[i]} \;.$$

Démonstration : Suivant (I.23), une série s'écrit, de manière unique, comme une somme de polynômes homogènes de degrés 0 à $j-1$ et d'une série d'ordre au moins j, ce qui prouve la première partie d'après la proposition I.7. La seconde partie en découle d'après la Proposition I.11. ■

I-5 Substitutions dans les séries

I-5.1 Substitutions

Cas d'un nombre fini d'indéterminées Si $F = \{X_1, \ldots, X_N\}$ et $G = \{Y_1, \ldots, Y_P\}$ sont deux ensembles finis, et si on se donne P séries $\zeta_i \in k[[F]]$, $1 \leq i \leq P$, *toutes non inversibles*, on peut associer à toute série $g \in k[[G]]$ une série $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \in$

$k[[F]]$ obtenue en "substituant" dans g chaque indéterminée Y_i par la série ζ_i (en les indéterminées X_j). Cette substitution ne va pas d'elle même a priori puis que l'on semble écrire des sommes infinies, mais il est facile de se convaincre que, puisque les termes constants de chaque ζ_i sont nuls, chaque coefficients de la série en X_i résultant de la substitution est une somme *finie* de produits de coefficients des séries ζ_i et de la série g (ce qui serait faux si les ζ_i avaient des termes constants); dans [20, Chap. VII, §1] est décrite la topologie suivant laquelle la série substituée est la limite des sommes partielle.

Bien sûr, la famille des ζ_i représente (si elles étaient convergentes !...) un germe d'application (analytique) $\zeta : k^N \to k^P$ qui envoie zéro sur zéro, et si l'on considère g comme un germe de fonction $k^P \to k$, $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ est le germe de $g \circ \zeta : \; k^N \to k$.

Cas général Si maintenant S et T sont deux ensembles non nécessairement finis, et si on se donne une famille $\zeta = (\zeta_Y)_{Y \in T}$ d'éléments *non inversibles* $\zeta_Y \in k[[S]]$, alors à tout $g \in k[[T]]$ on peut associer une série $g(\zeta) \in k[[S]]$ obtenue en "substituant" chaque $Y \in T$ par la série ζ_Y. Pour g donné, cette substitution ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables : en effet, par définition, il existe une partie finie G de T telle que $g \in k[[G]]$, et il existe alors aussi une partie finie F de S telle que $\zeta_Y \in k[[F]]$ pour tout $Y \in G$, si bien que $g(\zeta) \in k[[F]]$.

Ici aussi, on peut voir la famille $\{\zeta_Y\}_{Y \in T}$ comme une application $k^S \to k^T$ et la substitution comme une composition. La règle de dérivation des applications composées ("chain rule") prend la forme suivante :

Proposition I.16 *Si $\zeta = (\zeta_Y)_{Y \in T}$ est une famille d'éléments non inversibles de $k[[S]]$, et $g \in k[[T]]$, on a*

$$\mathrm{d}\,(g(\zeta)) \;=\; \sum_{Y \in T} \frac{\partial g}{\partial Y}(\zeta)\,\mathrm{d}\,(\zeta_Y)\ . \tag{I.39}$$

On peut aussi utiliser la famille ζ pour associer à une forme de degré r en les "anciennes indéterminées" $\eta \in \Lambda^r(k[[T]])$ une forme de degré r en les "nouvelles indéterminées", notée $\eta(\zeta) \in \Lambda^r(k[[S]])$ (la notation classique en géométrie différentielle serait $\zeta_\star\eta$). Si, comme en (I.15), η s'écrit

$$\eta \;=\; \sum_{\substack{(Y_1,\ldots,Y_r) \in T^r \\ Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_r}} b_{(Y_1,\ldots,Y_r)}\,\mathrm{d}Y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}Y_r$$

avec $b_{(Y_1,\dots,Y_r)} \in k[[T]]$ pour tout $(Y_1,\dots,Y_r)$, elle est définie par

$$\eta(\zeta) \quad = \sum_{\substack{(Y_1,\dots,Y_r)\in T^r \\ Y_1<Y_2<\cdots<Y_r}} b_{(Y_1,\dots,Y_r)}(\zeta)\,\mathrm{d}\left(\zeta_{Y_1}\right)\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\left(\zeta_{Y_r}\right)\,. \tag{I.40}$$

I-5.2 Système de coordonnées locales, changement d'indéterminées

Définition I.17 *Étant donnés S un ensemble, un* ***système de coordonnées*** *sur $k[[S]]$ est une famille $\zeta = (\zeta_Y)_{Y\in T}$ d'éléments de $k[[S]]$, indicée[3] par un autre ensemble T, telle que*

1. *chaque $\zeta_Y \in k[[S]]$ est non inversible,*
2. *il existe un famille $\xi = (\xi_X)_{X\in S}$ — que l'on notera parfois ζ^{-1} — d'éléments de $k[[T]]$ telle que*
   - (a) *chaque $\xi_X \in k[[T]]$ est non inversible,*
   - (b) *pour tout $X \in S$, $\xi_X(\zeta) = X$,*
   - (c) *pour tout $Y \in T$, $\zeta_Y(\xi) = Y$.*

Un système de coordonnées est un "germe de difféomorphisme" $k^S \to k^T$; il définit un isomorphisme (de k-algèbre)

$$\begin{array}{ccc} k[[T]] & \to & k[[S]] \\ h & \mapsto & h(\xi)\ , \end{array}$$

et aussi, selon (I.40), un isomorphisme $\Lambda^r(k[[T]]) \to \Lambda^r(k[[S]])$ pour tout entier r.

I-5.3 Changement d'indéterminées homogène pour l'ordre pondéré

Supposons donnés, pour chacun des ensembles S et T une application "poids", comme à la section I-4 :

$$\pi\,:\,S \to \mathbb{N}-\{0\}\,,\quad \rho\,:\,T \to \mathbb{N}-\{0\}\ ,$$

3. Il peut paraître surprenant d'utiliser la même notation T (ou S) pour l'ensemble des indéterminées elles-mêmes (notation $k[[T]]$ par exemple) et pour l'ensemble des indices des coordonnées (notation $(\zeta_Y)_{Y\in T}$ par exemple). C'est le choix le plus simple en l'absence d'une "numérotation" naturelle de l'ensemble T (ou S). Bien sûr, si par exemple $S = \{X_1,X_2\}$, $T = \{Y_1,Y_2\}$, on préférera noter le changement de coordonnées (y_1,y_2) que (y_{Y_1},y_{Y_2}) !

et notons

$$\mathbf{o}_\pi\ :\ k[[S]] \to \mathbb{N}\cup\{+\infty\}\,,\quad \mathbf{o}_\rho\ :\ k[[T]] \to \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$$

les “ordres pondérés” sur $k[[S]]$ et $k[[T]]$ respectivement, associés à ces poids. On dira qu'un changement de coordonnées est **homogène** si et seulement si la substitution par ces changements d'indéterminées envoie un ordre pondéré sur l'autre, c'est-à-dire si, pour tout $g \in k[[S]]$ et $h \in k[[T]]$, on a

$$\mathbf{o}_\rho(h) = \mathbf{o}_\pi(h(\zeta))\ ,\quad \mathbf{o}_\pi(g) = \mathbf{o}_\rho(g(\zeta^{-1})) \tag{I.41}$$

(pour la signification de ζ^{-1}, voir la Définition I.17).

Pour qu'un changement de coordonnées soit homogène, il faut bien sûr que $\mathbf{o}_\pi(\zeta_Y) = \rho(Y)$ pour tout $Y \in T$, mais cela ne suffit pas.

Proposition I.18 *Un changement de coordonnées $\zeta = (\zeta_Y)_{Y\in T}$ est homogène si et seulement si la substitution induit, pour chaque entier j, un isomorphisme $k[T]^{[j]} \to k[[S]]_j/k[[S]]_{j+1}$.*

Remarque : On peut aussi considérer que cet isomorphisme va de $k[[T]]_j/k[[T]]_{j+1}$ dans $k[[S]]_j/k[[S]]_{j+1}$ en choisissant, par troncation, un représentant du quotient dans $k[T]^{[j]}$; en revanche, la substitution n'envoie pas, en général $k[T]^{[j]}$ dans $k[S]^{[j]}$.

Démonstration : Comme remarqué à la fin de la section I-5.2, la substitution induit un isomorphisme $k[[T]] \to k[[S]]$; la donnée de la filtration étant, d'après (I.36), équivalente à celle de l'ordre, le changement de coordonnées est homogène si et seulement si les restrictions de cet isomorphisme aux $k[[T]]$ sont des isomorphismes $k[[T]]_j \to k[[S]]_j$. Le résultat est obtenu en passant aux quotients et utilisant, à gauche, le relèvement $(k[[T]]_j/k[[T]]_{j+1}) \to k[T]^{[j]}$ par troncation. ■

Chapitre II

L'algèbre différentielle locale associée à un système de contrôle

On considère un système de contrôle

$$\dot{x} \;=\; f(x,u) \tag{II.1}$$

où

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m \;, \tag{II.2}$$

(m et n sont des entiers) et f est analytique réelle.

L'étude qui suit est locale autour d'un point d'équilibre, c'est-à-dire que l'on suppose[1] que $f(0,0) = 0$.

Comme l'étude est locale, on peut considérer f comme la donnée de n séries (convergentes, bien sûr, mais vu qu'on ne l'exploitera pas, on ne le note même pas) :

$$f \;=\; \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \;,\quad f_i \;\in\; \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m]] \;,\; f_i(0) = 0 \;,\quad i \in \{1, \ldots, n\} \;. \tag{II.3}$$

Ce chapitre donne une construction détaillée des germes de fonctions, de formes différentielles, d'opérateurs différentiels, etc... le long des solutions de ce système.

1. L'hypothèse $f(0,0) = 0$ est utilisée tout au long de cette note. La situation au voisinage de points où f (ou les dérivées des contrôles) ne s'annule pas n'est donc pas traitée ici, ce qui permet une exposition allégée. Voir aussi le début du chapitre suivant.

Toutes les données sont supposées analytiques, mais on ne se soucie pas de la convergence des séries. On omet le mot “germe” dans tout ce qui suit, et on dit ainsi souvent “fonction” au lieu de “série formelle”.

II-1 L'anneau $\mathcal{A}$ des fonctions

Définissons deux ensembles d'indéterminées, l'un contenant $x_1,\ldots,x_n$, $u_1,\ldots,u_m$ et toutes leurs “dérivées par rapport au temps” (la $k$ième dérivée de h est notée $h^{(k)}$), considérées comme des indéterminées indépendantes, et l'autre contenant $x_1,\ldots,x_n$, $u_1,\ldots,u_m$, mais les dérivées de $u_1,\ldots,u_m$ seulement :

$$\Xi \;=\; \{x_i^{(k)}\}_{\substack{(i,k)\in\mathbb{N}^2\\ 1\leq i\leq n}} \;\cup\; \{u_j^{(k)}\}_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}^2\\ 1\leq j\leq m}}\;, \quad \Upsilon \;=\; \{x_i\}_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ 1\leq i\leq n}} \;\cup\; \{u_j^{(k)}\}_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}^2\\ 1\leq j\leq m}}\;. \tag{II.4}$$

Puisque $\{x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\}\subset\Upsilon\subset\Xi$, on a, avec les notations de la section I-2 et au vu de (II.3),

$$f_i \;\in\; \mathbb{R}[[\Upsilon]] \;\subset\; \mathbb{R}[[\Xi]]\;,\quad i\in\{1,\ldots,n\}\;.$$

$\mathbb{R}[[\Xi]]$ étant l'anneau des séries formelles d'un nombre fini de variables prises parmi $x,u,\dot{x},\dot{u},\ldots$, on lui donne une structure d'anneau différentiel en définissant

$$\begin{array}{rccc} \frac{d}{dt}: & \mathbb{R}[[\Xi]] & \to & \mathbb{R}[[\Xi]] \\ & g & \mapsto & \frac{d}{dt}\bullet g \end{array} \tag{II.5}$$

comme l'unique $\mathbb{R}$-dérivation qui envoie $x_i^{(j)}$ sur $x_i^{(j+1)}$ et $u_i^{(j)}$ sur $u_i^{(j+1)}$. Pour tout $g\in\mathbb{R}[[\Xi]]$, on utilise la notation $\dot{g}$ pour désigner $\frac{d}{dt}\bullet g$ et la notation $g^{(i)}$ est définie, pour tout $i\in\mathbb{N}$, par $g^{(0)}=g$, $g^{(1)}=\dot{g}$, $\ldots$, $g^{(i+1)}=\frac{d}{dt}\bullet\big(g^{(i)}\big)$. Soit alors $\mathcal{I}$ l'idéal <u>différentiel</u> de $\mathbb{R}[[\Xi]]$ engendré par les éléments de $\mathbb{R}[[\Xi]]$ suivants :

$$\dot{x}_i - f_i\;,\quad 1\leq i\leq n\;. \tag{II.6}$$

Remarque II.1 Tout élément de $\mathcal{I}$ est non inversible (i.e. tout élément de $\mathcal{I}$ a un terme constant nul). En effet, d'après (II.3), les éléments $\{\dot{x}_i - f_i\,,\,1\leq i\leq n\}$ sont non inversibles et leurs dérivées sont aussi non inversibles de manière évidente.

Le résultat suivant montre que toute classe du quotient $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ a un unique représentant dans $\mathbb{R}[[\Upsilon]]$. Notons que $\mathbb{R}[[\Upsilon]]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[[\Xi]]$, mais pas un sous-anneau différentiel.

Lemme II.2 *Pour tout g dans $\mathbb{R}[[\Xi]]$, il existe un unique $r\in\mathbb{R}[[\Upsilon]]\subset\mathbb{R}[[\Xi]]$ tel que $g-r\in\mathcal{I}$.*

Démonstration : Pour tous entiers $q,s,i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, on définit

$$\begin{array}{rcl} F_{i,q} & = & (\dot{x}_i - f_i)^{(q)} \ , \\ \Xi_{q,s} & = & \{x_i^{(k)}\}_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\} \\ k\in\{0,\ldots,q\}}} \ \cup \ \{u_j^{(k)}\}_{\substack{j\in\{1,\ldots,m\} \\ k\in\{0,\ldots,s\}}} \ . \end{array}$$

Il est clair que $\Xi_{0,s} \subset \Upsilon$, que $F_{i,q} \in \mathbb{R}[[\Xi_{q+1,q}]] \cap \mathcal{I}$ et que

$$F_{i,q} = x_i^{(q+1)} + \widetilde{F}_{i,q} \ \text{ avec } \widetilde{F}_{i,q} \in \mathbb{R}[[\Xi_{q,q}]] \ . \tag{II.7}$$

Soit g dans $\mathbb{R}[[\Xi]]$. Par définition, il existe un ensemble fini $G \subset \Xi$ tel que $g \in \mathbb{R}[[G]]$. Vu que $(\Xi_{q+1,q})_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles finis dont la réunion est Ξ, et que G est fini, il existe un entier Q tel que $G \subset \Xi_{Q+1,Q}$, et on a donc $g \in \mathbb{R}[[\Xi_{Q+1,Q}]]$. Appliquons maintenant le Corollaire I.3 avec $\nu = n$, $f_i = F_{i,Q}$, $h = g$, $F = \Xi_{Q+1,Q}$, $X_i = x_i^{(Q+1)}$ (si bien que $F - \{X_1,\ldots,X_\nu\} = \Xi_{Q,Q}$); on obtient des séries $u_1,\ldots,u_n$, que l'on va plutôt noter $v_{1,Q},\ldots,v_{n,Q}$ et une série $r_Q \in \mathbb{R}[[\Xi_{Q,Q}]]$ telles que $g = \sum_i v_{i,Q}F_{i,Q} + r_Q$. On peut alors appliquer à nouveau le Corollaire I.3 avec $\nu = n$, mais $f_i = F_{i,Q-1}$, $h = r_Q$, $F = \Xi_{Q,Q}$, $X_i = x_i^{(Q)}$ (si bien que $F - \{X_1,\ldots,X_\nu\} = \Xi_{Q-1,Q}$), pour obtenir des séries $v_{1,Q-1},\ldots,v_{n,Q-1}$ et une série $r_{Q-1} \in \mathbb{R}[[\Xi_{Q-1,Q}]]$ telles que $r_Q = \sum_i v_{i,Q-1}F_{i,Q-1} + r_{Q-1}$. De proche en proche, après avoir applique le Corollaire I.3 Q fois, on obtient des séries $v_{i,q}$, pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ et $q \in \{1\ldots,Q\}$ telles que

$$g \ = \ r_0 \ + \sum_{\substack{i\in\{1,\ldots,n\} \\ q\in\{1\ldots,Q\}}} v_{i,q}F_{i,q}$$

avec $r_0 \in \mathbb{R}[[\Xi_{0,Q}]] \subset \mathbb{R}[[\Upsilon]]$, si bien que $g - r_0 \in \mathcal{I}$. $r = r_0$ convient donc et son unicité résulte de l'unicité contenue dans le corollaire I.3 à chaque étape.

Proposition II.3 *L'anneau différentiel $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ est isomorphe à $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[\Upsilon]]$ muni de la dérivation :*

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt} : \ \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ g & \mapsto & \frac{d}{dt} \bullet g \ = \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} f_i \ + \sum_{i=1,j\geq 0}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_i^{(j)}} u_i^{(j+1)} \ . \end{array} \tag{II.8}$$

Démonstration : Considérons l'application qui à tout élément r de $\mathcal{A}$ associe sa classe d'équivalence $\bar{r}$ dans $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$. Cette application est bien définie, est un morphisme d'anneaux différentiels et le lemme II.2 rend cette application inversible. On a donc construit un isomorphisme d'anneaux différentiels de $\mathcal{A}$ vers $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ ■

Ceci montre en particulier que $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ est intègre et donc que $\mathcal{I}$ est premier, ce que l'on aurait pu montrer directement.

II-2 L'anneau $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ des opérateurs différentiels

On abandonne $\mathbb{R}[[\Xi]]/\mathcal{I}$ pour travailler sur $\mathcal{A}$, muni de la dérivation (II.8), qui est un anneau différentiel plus concret.

Appelons $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{A}$, qui sont sont polynomiaux en $\frac{d}{dt}$ à coefficients dans $\mathcal{A}$. Un élément $p \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ sera noté $\sum a_k \frac{d}{dt}^k$ avec a_k dans $\mathcal{A}$, la somme étant finie. Pour $p \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ et $h \in \mathcal{A}$, on note $p \bullet h = \sum a_k h^{(k)} \in \mathcal{A}$ l'élément obtenu en appliquant l'opérateur p à h.

Ceci définit une multiplication externe $\bullet\ : \mathcal{A}[\frac{d}{dt}] \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. La multiplication dans $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ n'est pas la multiplication commutative usuelle des polynômes, mais la composition des opérateurs différentiels, qui donne une multiplication non commutative des polynômes. On la notera multiplicativement[2] : pour tout $p,q \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ et $h \in \mathcal{A}$, on a $(pq) \bullet h = p \bullet (q \bullet h)$. Ceci fait de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ une $\mathbb{R}$-algèbre non commutative, et de $\mathcal{A}$ un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module à gauche. Par unification avec les polynômes à coefficients formes différentielles (voir plus loin), on utilisera parfois le symbole $\wedge$, c'est-à-dire que l'on notera indifféremment pq ou $p \wedge q$. Il faut prendre garde à ne pas confondre les lois internes et externes lorsque l'on applique un polynômes. Par exemple, en notant $\wedge$ la loi interne (dans les membres de gauche, mais pas dans les membres de droite) pour insister, on a

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt} \bullet u_1 = \dot{u}_1,\\
&\tfrac{d}{dt} \wedge u_1 = \dot{u}_1 + u_1 \tfrac{d}{dt},\\
&u_1 \wedge \tfrac{d}{dt} = u_1 \tfrac{d}{dt},
\end{aligned}$$

(sans $\wedge$, la deuxième égalité se lit $\frac{d}{dt} u_1 = \dot{u}_1 + u_1 \frac{d}{dt}$).

$\mathcal{A}$ est aussi un sous-anneau de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, l'inclusion $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ consistant à identifier a dans $\mathcal{A}$ au polynôme de degré zéro a ou à l'opérateur différentiel de degré zéro

2. Cette notation est aussi celle de la multiplication usuelle des polynômes, mais cette dernière ne sera jamais utilisée ici. Noter par ailleurs que cette notation multiplicative est cohérente avec la notation $\sum a_k \frac{d}{dt}^k$, où chaque a_k peut être vu comme un polynôme de degré zéro : l'opérateur $a_k \frac{d}{dt}^k$ est bien $\frac{d}{dt}^k$ suivi de la multiplication par a_k.

"multiplication par a". On va être amené à étudier des modules sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$. Les $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-modules ont aussi une structure de modules sur $\mathcal{A}$.

Proposition II.4 *Soit M un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module libre et $\{\omega_j\}_{j\in\{1,\dots,m\}}$ une base de M sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$. M est alors aussi un $\mathcal{A}$-module libre et $\{\omega_j^{(k)}\}_{j\in\{1,\dots,m\},k\in\mathbb{N}}$ en est une base.*

Démonstration : Soit $\eta = \sum_{j\in\{1,\dots,m\},k\in\mathbb{N}} \eta_{j,k} \frac{d}{dt}^k \omega_j \in M$, où $\eta_{j,k} \in \mathcal{A}$ pour $j \in \{1,\dots,m\}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{j\in\{1,\dots,m\},k\in\mathbb{N}} \eta_{j,k} \frac{d}{dt}^k \omega_j = \sum_{j\in\{1,\dots,m\},k\in\mathbb{N}} \eta_{j,k}\omega_j^{(k)},$$

d'où le résultat ■

II-3 Les formes différentielles, l'algèbre extérieure

II-3.1 Module $\Lambda^1(\mathcal{A})$ des formes différentielles

On a défini (section I-3), pour tout anneau de séries formelles, un module sur cet anneau, qui est le module des différentielles. On peut bien sûr appliquer cette construction à $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[\Upsilon]]$. Comme $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est non seulement un $\mathcal{A}$-module, mais aussi un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module, construisons le directement en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module.

On considère le $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module libre engendré par les $n+m$ éléments dx et du ($dx = (dx_1,\dots,dx_n)$ et $du = (du_1,\dots,du_m)$) :

$$M = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]dx_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]du_i\right) ,$$

et N le sous-module de M engendré par les "linéarisés" de $\dot{x}_i - f_i(x,u)$:

$$N = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}[\frac{d}{dt}](\frac{d}{dt}dx_i - df_i) .$$

$\Lambda^1(\mathcal{A})$ est le $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module quotient :

$$\Lambda^1(\mathcal{A}) = M/N .$$

Il est facile de vérifier que $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est aussi un $\mathcal{A}$-module, que ce $\mathcal{A}$-module est libre et qu'une base est donnée par $\{\mathrm{d}z\}_{z\in\Upsilon}$. Puisque $\mathcal{A}=\mathbb{R}[[\Upsilon]]$, ceci est bien la construction (I.10) de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}$-module.

II-3.2 Liberté du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module des formes différentielles

Bien sûr, $\Lambda^1(\mathcal{A})$ construit ci-dessus n'a aucune raison a priori d'être un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module libre.

Comme discuté dans [7] ce module est libre si et seulement si l'approximation linéaire du système est commandable. Voir aussi [1, pp.24-28]. Puisqu'on a fait ici l'hypothèse que l'on est en un point d'équilibre, ceci s'exprime aisément. Définissons les matrices $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ et $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$

$$A \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(0) \;\;,\quad B \;=\; \frac{\partial f}{\partial u}(0) \;\;. \tag{II.9}$$

En d'autres termes, l'élément (i,j) de A est le terme constant de $\partial f_i/\partial x_j$ et l'élément (i,k) de B le terme constant de $\partial f_i/\partial u_k$.

Proposition II.5 *$\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module libre si et seulement si le rang des colonnes de $\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ est égal à n.*

On pourrait donner de ceci une preuve directe, mais c'est en dehors du propos de cette note. Dans [1] on donne une manière simple de construire une base en un point dit “Brunovský-régulier”. On ne rappelle pas ici cette notion, mais on peut donner une condition suffisante (générique) pour que le point d'équilibre $(0,0,0,\ldots)$ soit Brunovský-régulier, et des précisions sur la base obtenue dans ce cas-là. Cette condition est que le rang des colonnes de $B, AB, \ldots, A^jB$ soit maximal pour tout j :

Proposition II.6 *Soient ρ et σ les entiers tels que*

$$n \;=\; m\,\rho \,+\, \sigma\;,\quad 0\leq\sigma\leq m-1\;.$$

Si le rang des colonnes de $B, AB, \ldots, A^{\rho-1}B$ est égal à $m\rho$ et celui des colonnes de $B, AB, \ldots, A^{\rho}B$ à n, alors il existe une base $\{\omega_1,\ldots,\omega_m\}$ de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module, telle que chaque forme ω_j s'écrit $\omega_j=\sum_{\ell=1}^{n}a_{j,\ell}\,\mathrm{d}x_\ell$ avec $a_{j,\ell}\in\mathcal{A}$, et *les formes*

$$\begin{array}{lllll}
\omega_1, & \dot\omega_1, & \dots & \dots & \omega_1^{(\rho)}, \\
\vdots & & & & \vdots \\
\omega_\sigma, & \dot\omega_\sigma, & \dots & \dots & \omega_\sigma^{(\rho)}, \\
\omega_{\sigma+1}, & \dot\omega_{\sigma+1}, & \dots & \omega_{\sigma+1}^{(\rho-1)}, & \\
\vdots & & & \vdots & \\
\omega_m, & \dot\omega_m, & \dots & \omega_m^{(\rho-1)} &
\end{array}$$

appartiennent au $\mathcal{A}$-module engendré par $\mathrm{d}x_1,\dots,\mathrm{d}x_n$ *et en forment une base.*

Le cas $m = 1$

Si $m = 1$, les deux cas ci-dessus se confondent, et dès que le linéarisé est commandable, il existe une forme $\omega = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\, \mathrm{d}x_\ell$ ($a_\ell \in \mathcal{A}$) telle que $\{\omega\}$ est une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, c'est-à-dire que toute forme $\eta \in \Lambda^1(\mathcal{A})$ s'écrit $p \bullet \omega$ pour un certain $p \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$. Il est du reste facile de voir que cette base est unique à coefficient multiplicatif inversible près : toute base s'écrit $\{\lambda\omega\}$ avec $\lambda \in \mathcal{A}$, $\lambda(0) \neq 0$.

Cette unicité de la base est propre à la dimension 1 : pour $m = 2$, par exemple, si $\{\omega_1,\omega_2\}$ est une base, $\{\omega_1,\omega_2 + \omega_1^{(s)}\}$ est une base pour tout $s \in \mathbb{N}$.

II-3.3 Algèbre extérieure

On peut appliquer les constructions de la section I-3 et construire, pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, $\Lambda^r(\mathcal{A}) = \bigwedge^r(\Lambda^1(\mathcal{A}))$, et $\mathrm{d} : \Lambda^r(\mathcal{A}) \to \Lambda^{r+1}(\mathcal{A})$.

La différentielle extérieure d commute avec la dérivation $\frac{d}{dt}$ (voir par exemple [10]).

Chacun des $\Lambda^r(\mathcal{A})$ est construit (cf. section I-3) comme un $\mathcal{A}$-module; comme on a vu en (I.13), si $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}$-module libre, alors tous les $\Lambda^r(\mathcal{A})$ sont des $\mathcal{A}$-modules libres. Construisons, comme en (I.13), une base de ces $\mathcal{A}$-modules. On suppose pour cela, comme discuté à la section précédente (et par la suite on sera dans ce cas), que $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module libre, et que $\{\omega_1,\dots,\omega_m\}$ en est une base; alors $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{j\in\{1,\dots,m\}\\ k\in\mathbb{N}}}$ est une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}$-module, lui aussi libre. Comme en (I.13), on a besoin d'un ordre sur cette base; prenons l'ordre lexicographique sur les indices, c'est à dire que pour (j,k) et (j',k') dans $\{1,\dots,m\} \times \mathbb{N}$,

$$(j,k) \leq (j',k') \quad \Leftrightarrow \quad j \leq j' \text{ et } \big(j = j' \Rightarrow k \leq k'\big) \ ; \tag{II.10}$$

alors

$$\left\{\omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_r}^{(k_r)}\right\}_{\substack{(j_i,k_i)\in\{1,\ldots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)< \cdots <(j_r,k_r)}} \tag{II.11}$$

est une base de $\Lambda^r(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}$-module.

$\Lambda^r(\mathcal{A})$ a aussi une structure de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module, de la liberté duquel on ne se soucie pas.

On peut définir comme en (I.17) l'algèbre extérieure $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i(\mathcal{A})$ dont les éléments sont des somme symboliques de formes de degrés différents.

II-4 Opérateurs différentiels à coefficients formes

Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, on peut définir l'ensemble $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ des polynômes en $\frac{d}{dt}$ à coefficients dans $\Lambda^r(\mathcal{A})$. Un élément de $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ s'écrit

$$p \;=\; \sum_{j=0}^{J} \eta_j \frac{d}{dt}^{j}$$

avec $\eta_j \in \Lambda^r(\mathcal{A})$, et il définit naturellement, pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, un opérateur différentiel

$$\begin{array}{ccl} \Lambda^i(\mathcal{A}) & \to & \Lambda^{i+r}(\mathcal{A}) \\ \omega & \mapsto & p \bullet \omega \;=\; \displaystyle\sum_{j=0}^{J} \eta_j \wedge \left(\frac{d}{dt}^{j} \bullet \omega\right) \;=\; \sum_{j=0}^{J} \eta_j \wedge \omega^{(j)} \;. \end{array} \tag{II.12}$$

On peut étendre le produit extérieur aux polynômes comme correspondant à la composition des opérateurs ci-dessus, c'est-à-dire que

$$\wedge \;:\; \begin{array}{ccc} \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \times \Lambda^s(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] & \to & \Lambda^{r+s}(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \\ (p,q) & \mapsto & p \wedge q \end{array}$$

est tel que, pour tout ω,

$$(p \wedge q) \bullet \omega \;=\; p \bullet (q \bullet \omega) \;.$$

Cette loi est similaire à la multiplication définie à la section II-2 pour les opérateurs différentiels à coefficients fonctions ($\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ s'identifie à $\Lambda^0(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$), le produit extérieur des formes remplaçant la multiplication dans $\mathcal{A}$.

On peut alors, comme en (I.17), définir une grande algèbre par :

$$\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \ . \tag{II.13}$$

Un élément de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ peut aussi s'écrire comme un polynôme en $\frac{d}{dt}$ à coefficients dans $\Lambda(\mathcal{A})$. Tous les objets considérés par la suite peuvent être vus comme des éléments de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, ou des matrices d'éléments de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$.

Notons que, d'après (II.11) et (II.13), une base de $\mathcal{A}$-module $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ est donnée par :

$$\left\{ \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_r}^{(k_r)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}^{\lambda} \right\}_{\substack{r\in\mathbb{N} \\ \lambda\in\mathbb{N} \\ (j_i,k_i)\in\{1,\ldots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)< \cdots <(j_r,k_r)}} \ . \tag{II.14}$$

II-5 Matrices d'opérateurs différentiels

On sera amené à faire agir des opérateurs sur des m-uplets (m un entier positif) de formes, ou de fonctions, que l'on notera comme des vecteurs colonnes d'éléments de $\mathcal{A}$ ou de $\Lambda^i(\mathcal{A})$. les opérateurs qui agissent sur ces m-uplets seront notés comme des matrices carrées. On note

$$\left(\Lambda^j(\mathcal{A})\right)^m \qquad \text{et} \qquad \left(\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$$

les $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-modules formés respectivement des vecteurs (colonnes) de dimension m dont chaque élément est dans $\Lambda^j(\mathcal{A})$ et des matrices carrées $m \times m$, dont chaque élément est dans $\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$.

Pour $M \in \left(\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ et $X \in \left(\Lambda^j(\mathcal{A})\right)^m$, on note $M \bullet X \in \left(\Lambda^{i+j}(\mathcal{A})\right)^m$ le vecteur obtenu par multiplication matricielle classique en prenant $\bullet$ (voir (II.12)) comme multiplication entre éléments des matrices. Pour $M \in \left(\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ et $M' \in \left(\Lambda^{i'}(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$, on note $M \wedge M' \in \left(\Lambda^{i+i'}(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ la matrice obtenue par une multiplication matricielle où la multiplication entre éléments des matrices est celle définie à la section II-4. On a bien sûr $(M \wedge M') \bullet X = M \bullet (M' \bullet X)$.

On confondra un élément de $M \in \left(\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ avec l'opérateur différentiel

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(\mathcal{A})^m & \to & \Lambda(\mathcal{A})^m \\ X & \mapsto & M \bullet X \end{array}$$

qui envoie chaque $(\Lambda^r(\mathcal{A}))^m$ dans $\left(\Lambda^{r+i}(\mathcal{A})\right)^m$.

Chapitre III

Une valuation naturelle

III-1 Hypothèses essentielles

Point d'équilibre

Comme au chapitre précédent on suppose ici que l'on travaille au *point d'équilibre* (0,0), ce qui se traduit par (II.3) et entraîne, que, pour tout $h \in \mathcal{A}$, on a

$$\dot{h}(0) \;=\; 0 \;. \tag{III.1}$$

C'est cette dernière propriété (ou autrement dit le fait que l'idéal maximal de $\mathcal{A}$ soit un idéal différentiel), qui est exploitée dans le présent chapitre.

On peut se passer de cette propriété moyennant des construction un peu plus générales qui ne sont pas données ici.

Liberté du module des différentielles

On a aussi besoin de supposer que

$$\Lambda^1(\mathcal{A}) \textit{ est un } \mathcal{A}[\tfrac{d}{dt}]\textit{-module libre.} \tag{III.2}$$

A la section II-3.2, on a rappelé que cette hypothèse est celle de la commandabilité du linéarisé et donné des conditions dans le cas d'un point d'équilibre.

Contrairement à (III.1), il ne semble pas que l'on puisse se passer facilement de cette hypothèse. Il est à noter que cette hypothèse est en fait un condition nécessaire pour la platitude, voir chapitre IV et en particulier la remarque qui suit la définition IV.1.

On suppose choisie une base, dans la suite. On la note verticalement :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} . \tag{III.3}$$

Les constructions faites aux sections III-2 et III-3 dépendent a priori du choix de cette base, supposée fixée sans plus de précision. A la section III-4, on montrera que la valuation que l'on a construit ne dépend en réalité pas du choix de cette base.

III-2 Valuation des fonctions

On va ici construire la valuation "Val" sur l'anneau $\mathcal{A}$ des "fonctions" (c'est-à-dire des séries). On donne ensuite un certain nombre de propriétés de Val, mais on ne prouvera qu'à la section III-5.3 qu'il s'agit d'une valuation.

III-2.1 Définition

Proposition III.1 *Il existe une unique application*

$$\mathrm{Val} \;:\; \mathcal{A} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

telle que les propriétés suivantes soient vérifiées pour tout $g \in \mathcal{A}$:

- $g = 0 \iff \mathrm{Val}(g) = +\infty$ (III.4)
- $g(0) \neq 0 \iff \mathrm{Val}\, g = 0$ (III.5)
- *si* $g(0) = 0$, *en définissant les* $g_{j,k} \in \mathcal{A}$ *par* $dg = \sum_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}} g_{j,k}\, \omega_j^{(k)}$,

  on a $\mathrm{Val}(g) = \min_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}} \{k + 1 + \mathrm{Val}(g_{j,k})\}$ (III.6)

Pour un élément h de $\mathcal{A}$ non nul (le cas nul étant donné par (III.4)), expliquons brièvement comment utiliser les propriétés de la proposition III.1 pour calculer $\mathrm{Val}\, h$. On utilise une première fois (III.5) avec $g = h$ et on a :

Si $h(0) \neq 0$, $\mathrm{Val}(h) = 0$.

Si $h(0) = 0$, on différentie h et on décompose dh sur la base Ω :

$$dh = \sum_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} h_{j,k} \omega_j^{(k)}.$$

La somme est finie, c'est-à-dire que seul un nombre fini de $h_{j,k}$ sont non nuls. On applique alors (III.6), avec $g = h$: $\mathrm{Val}(h) = \min_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} \{k + 1 + \mathrm{Val}(h_{j,k})\}$, le minimum étant à prendre sur un nombre fini de couples (j,k). On est alors ramené à évaluer l'image par Val de chaque $h_{j,k}$, ou tout au moins d'un nombre fini, non nuls. Pour chacun d'eux, on recommence l'étude ci-dessus en remplaçant h par $h_{j,k}$:

pour (j,k) **tel que $h_{j,k}(0) \neq 0$,** $\mathrm{Val}(h_{j,k}) = 0$,

pour (j,k) **tel que $h_{j,k}(0) = 0$,** on doit décompose $dh_{j,k}$ sur la base Ω :

$$dh_{j,k} = \sum_{1 \leq j' \leq m, k' \in \mathbb{N}} h_{j,k,j',k'} \omega_{j'}^{(k')},$$

et, en appliquant (III.6) à $g = h_{j,k}$, on a :

$$\mathrm{Val}(h_{j,k}) = \min_{1 \leq j' \leq m, k' \in \mathbb{N}} \{k' + 1 + \mathrm{Val}(h_{j,k,j',k'})\}$$

$\vdots$

Il n'est pas évident a priori que cette procédure s'arrête. On montre dans la preuve ci-dessous que si h est non nulle, après un nombre fini d'étapes, on a rencontré un élément de $\mathcal{A}$ dont le terme constant est non nul et dont la valuation est donc connue. On verra que ceci entraîne que $\mathrm{Val}(h)$ est bien défini et fini.

Démonstration : On considère g dans $\mathcal{A}$, alors soit $g(0) \neq 0$ et $\mathrm{Val}(g) = 0$, soit $\mathrm{Val}(g) = \min_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} \{k + 1 + \mathrm{Val}(g_{j,k})\}$, avec $dg = \sum_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}} g_{j,k} \omega_j^{(k)}$. Considérons l'ensemble G des séries de $\mathcal{A}$ issues de la décomposition de dg le long de Ω puis de la décomposition de la différentielle de chacune des $g_{j,k}$ et ainsi de suite.

- Si tous les éléments de G sont nuls en zéro. En décomposant dg le long de la base $dx, du, d\dot{u}, \ldots$, les coefficients sont nuls aussi en zéro, par indépendance des éléments de la base. Donc une fonction dont tous les coefficients de sa différentielle sont nuls en zéro a toutes ses dérivées partielles du premier ordre nulles en zéro. Alors, si dg a tous ses coefficients nuls en zéro, puis les coefficients des différentielles de ses coefficients et ainsi de suite, alors il est évident que toutes les dérivées partielles des $g_{j,k}$ sont nulles en zéro et donc les $g_{j,k}$ sont toutes la série nulle car une série dont tous les coefficients sont nuls est la série nulle, donc $g = 0$ et $\mathrm{Val}(g) = +\infty$ et est bien défini.

- Si un des $g_{j,k}$ (coefficient issu de la décomposition de dg lui-même) est non nul en 0 par exemple $g_{\bar{\jmath},\bar{k}}$, alors $\mathrm{Val}(g) \leq 1 + \bar{k}$. Alors, il suffit de différentier $\bar{k}$ fois successivement les coefficients de g, puis les coefficients des différentielles des coefficients de g et ainsi de suite jusqu'à l'ordre $\bar{k}$ et de tester la valeur de ces fonctions en 0, $\mathrm{Val}(g)$ est alors bien défini en tant que minimum d'un ensemble fini d'entiers.
- Si il existe un élément de G non nul en 0 mais qu'aucun des coefficients $g_{j,k}$ de dg est non nul en zéro, alors on différentie ces derniers et on regarde la valeur des coefficients de leur différentielle en zéro. On itère alors le processus de différentiation jusqu'à ce qu'un des coefficients soit non nul en zéro, alors on est ramené au cas ci-dessus et $\mathrm{Val}(g)$ est bien défini. ■

III-2.2 Propriétés de la fonction Val sur $\mathcal{A}$.

La proposition suivante donne des propriétés de la fonction Val qui en font "presque" une valuation. On verra plus loin (section III-5.3) qu'il est bien vrai que $\mathrm{Val}(gh) = \mathrm{Val}\, g + \mathrm{Val}\, h$ pour tout g et h, mais il sera plus aisé de le démontrer après avoir établi à la section III-5 l'existence de coordonnées dans lesquelles Val coïncide avec une valuation plus classique. D'ici là, on va se contenter de l'inégalité (III.9) ci-dessous.

Proposition III.2 *Pour tous g et h dans $\mathcal{A}$, on a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Val}(g+h) &\geq \min\{\mathrm{Val}(g), \mathrm{Val}(h)\} \;, && \text{(III.7)} \\ \mathrm{Val}(h) > \mathrm{Val}(g) \implies \mathrm{Val}(g+h) &= \mathrm{Val}(g) \;, && \text{(III.8)} \\ \mathrm{Val}(gh) &\geq \mathrm{Val}(g) + \mathrm{Val}(h) \;, && \text{(III.9)} \\ \mathrm{Val}(h) = 0 \implies \mathrm{Val}(gh) &= \mathrm{Val}(g) \;, && \text{(III.10)} \\ \mathrm{Val}(\dot{h}) &\geq 1 + \mathrm{Val}(h) \;. && \text{(III.11)} \end{aligned}$$

Démonstration: Pour g ou h dans $\mathcal{A}$, fixons une fois pour toute la notation suivante : on développe dg et dh sur la base $(\omega_j^{(k)})_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}}$ du $\mathcal{A}$-module $\Lambda^1(\mathcal{A})$, définissant des fonctions $g_{j,k}$ et $h_{j,k}$ par :

$$\begin{aligned} dg &= \sum_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}} g_{j,k}\omega_j^{(k)}, \\ dh &= \sum_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}} h_{j,k}\omega_j^{(k)}. \end{aligned} \qquad \text{(III.12)}$$

Démonstration de (III.7). Montrons par récurrence sur i que la propriété suivante est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{R}_i \ : \ \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } g \text{ et } h \text{ dans } \mathcal{A}, \text{ tels que } \operatorname{Val}(g+h) \leq i\,, \\ \operatorname{Val}(g+h) \geq \min\{\operatorname{Val}(g), \operatorname{Val}(h)\}\ . \end{array} \right.$$

- Si $\operatorname{Val}(g+h) = 0$ alors, d'après (III.5), $(g+h)(0) = g(0) + h(0) \neq 0$ et donc soit $g(0) \neq 0$ soit $h(0) \neq 0$, et donc, toujours d'après (III.5), $\operatorname{Val} g$ ou $\operatorname{Val} h$ est nul. Ceci prouve $\mathcal{R}_0$.
- Soit $i \geq 0$. Supposons $\mathcal{R}_i$ vraie et montrons alors que $\mathcal{R}_{i+1}$ est vraie.
  Soient g et h dans $\mathcal{A}$, tels que $\operatorname{Val}(g+h) \leq i+1$. Si $\operatorname{Val}(g+h) \leq i$, l'inégalité $\operatorname{Val}(g+h) \geq \min\{\operatorname{Val}(g), \operatorname{Val}(h)\}$ est une conséquence de $\mathcal{R}_i$; on suppose donc que $\operatorname{Val}(g+h) = i+1$. D'après (III.6), en utilisant les notations (III.12), il existe des entiers $\bar{\jmath}$ et $\bar{k}$ tels que

  $$i+1 = \operatorname{Val}(g+h) = \bar{k} + 1 + \operatorname{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}} + h_{\bar{\jmath},\bar{k}})\ .$$

  Ceci entraîne $\operatorname{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}} + h_{\bar{\jmath},\bar{k}}) \leq i$ et donc, en appliquant $\mathcal{R}_i$ à $g_{\bar{\jmath},\bar{k}}$ et $h_{\bar{\jmath},\bar{k}}$, on a

  $$\operatorname{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}} + h_{\bar{\jmath},\bar{k}}) \geq \min\{\operatorname{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}}), \operatorname{Val}(h_{\bar{\jmath},\bar{k}})\}\ .$$

  Comme $\operatorname{Val} g \leq \bar{k} + 1 + \operatorname{Val} g_{\bar{\jmath},\bar{k}}$ et $\operatorname{Val} h \leq \bar{k} + 1 + \operatorname{Val} h_{\bar{\jmath},\bar{k}}$, les deux relations ci-dessus entraînent $\operatorname{Val}(g+h) \geq \min\{\operatorname{Val}(g), \operatorname{Val}(h)\}$. Ceci prouve $\mathcal{R}_{i+1}$.

Démonstration de (III.8). Il est très classique que (III.7) entraîne (III.8); rappelons pourquoi. Si $\operatorname{Val} g < \operatorname{Val} h$, alors (III.7) entraîne évidemment $\operatorname{Val}(g+h) \geq \operatorname{Val} g$, mais aussi

$$\operatorname{Val} g \ = \ \operatorname{Val}(g+h-h) \ \geq \ \min\{\operatorname{Val}(g+h)\,,\, \operatorname{Val}(-h)\}\ . \qquad \text{(III.13)}$$

Il est clair, d'après la construction de Val(), que $\operatorname{Val}(-h) = \operatorname{Val} h$ (par récurrence sur $\operatorname{Val} h$: $\operatorname{Val}(-h) = 0$ si et seulement si $\operatorname{Val} h = 0$, et si $\operatorname{Val} h > 0$, on se ramène à des fonctions de valuation strictement inférieure en décomposant dh comme en (III.6)). Comme $\operatorname{Val}(-h) = \operatorname{Val} h > \operatorname{Val} g$, la relation (III.13) entraîne $\operatorname{Val} g \geq \operatorname{Val}(g+h)$.

Démonstration de (III.9). Montrons par récurrence sur i que la propriété suivante est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{R}_i$: {pour tout g et h dans $\mathcal{A}$, si $\operatorname{Val}(gh) \leq i$ alors $\operatorname{Val}(gh) \geq \operatorname{Val}(g) + \operatorname{Val}(h)$. }.

- Si $\operatorname{Val}(gh) = 0$, alors $g(0)h(0) \neq 0$, donc $\operatorname{Val}(g) = \operatorname{Val}(h) = 0$. $\mathcal{R}_0$ est donc vérifiée.

– Soit $i \geq 0$. Supposons $\mathcal{R}_i$ vraie et montrons alors que $\mathcal{R}_{i+1}$ est vraie.
$\mathcal{R}_i$ étant vraie, il suffit, pour prouver $\mathcal{R}_{i+1}$, de considérer g et h dans $\mathcal{A}$, tels que $\mathrm{Val}(gh) = i+1$. Comme $\mathrm{Val}(gh) > 0$, (III.5) entraîne $gh(0) = 0$ et donc, avec les notations (III.12), (III.6) entraîne, puisque $d(gh) = g\,dh + h\,dg$,

$$\mathrm{Val}(gh) \;=\; \min_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}} k + 1 + \mathrm{Val}(gh_{j,k} + g_{j,k}h)\ .$$

Soient $\bar{\jmath},\bar{k}$ des indices tels que le minimum soit atteint. On a, en utilisant (III.7) pour l'inégalité,

$$\begin{aligned} i+1 \;&=\; \mathrm{Val}(gh) \;=\; \bar{k} + 1 + \mathrm{Val}(gh_{\bar{\jmath},\bar{k}} + g_{\bar{\jmath},\bar{k}}h) \\ &\geq\; \bar{k} + 1 + \min\{\mathrm{Val}(gh_{\bar{\jmath},\bar{k}}), \mathrm{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}}h)\}\ . \end{aligned} \tag{III.14}$$

Quitte à inverser le rôle de g et h, on peut supposer que $\mathrm{Val}(gh_{\bar{\jmath},\bar{k}}) \geq \mathrm{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}}h)$. On a alors $\mathrm{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}}h) \leq i - \bar{k}$, d'où, en appliquant $\mathcal{R}_i$ à $g_{\bar{\jmath},\bar{k}}$ et h, l'inégalité $\mathrm{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}}h) \geq \mathrm{Val}\, g_{\bar{\jmath},\bar{k}} + \mathrm{Val}\, h$. L'équation ci-dessus entraîne alors

$$\mathrm{Val}(gh) \;\;\geq\;\; \bar{k} + 1 + \mathrm{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}}h) \;\;\geq\;\; \bar{k} + 1 + \mathrm{Val}\, g_{\bar{\jmath},\bar{k}} \;+\; \mathrm{Val}\, h$$

Comme $\mathrm{Val}\, g \leq \bar{k} + 1 + \mathrm{Val}(g_{\bar{\jmath},\bar{k}})$, cela entraîne bien $\mathrm{Val}(gh) \geq \mathrm{Val}\, g + \mathrm{Val}\, h$, ce qui prouve $\mathcal{R}_{i+1}$.

Démonstration de (III.10). C'est une conséquence de (III.9). En effet, si $\mathrm{Val}\, h = 0$, alors $h(0) \neq 0$ c'est à dire que la série h à un terme constant non nul, si bien qu'il existe une série $\frac{1}{h} \in \mathcal{A}$ telle que $g = \frac{1}{h}\, gh$ et $\mathrm{Val}\, \frac{1}{h} = \mathrm{Val}\, h = 0$. Alors, on obtient $\mathrm{Val}\, g \geq \mathrm{Val}(gh)$ en appliquant (III.9) à gh et $\frac{1}{h}$, et $\mathrm{Val}(gh) \geq \mathrm{Val}\, g$ en appliquant (III.9) à g et h.

Démonstration de (III.11).

Soit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\qquad A_i \;=\; \{\, g \in \mathcal{A}\,,\ \mathrm{Val}\, \dot{g} = i \;\text{ et }\; \mathrm{Val}\, g \geq i\,\}\ .$
D'après (III.1) et (III.5), $\mathrm{Val}\, \dot{h} \geq 1$ pour tout h, et donc $A_0 = \varnothing$. Par ailleurs, si $\mathrm{Val}\, \dot{h} = +\infty$, il est trivialement vrai que $\mathrm{Val}\, \dot{h} \geq 1 + \mathrm{Val}\, h$. Par conséquent, (III.11) est vraie pour tout $h \in \mathcal{A}$ si et seulement si tous les A_i sont vides pour $i \geq 1$, ce que nous allons prouver par l'absurde. Si il existait un A_i non vide, soit $\nu \geq 1$ le plus petit entier tel que $A_\nu \neq \varnothing$, et un élément h de A_ν. Le fait que $\mathrm{Val}\, h \geq \nu \geq 1$ entraîne $h(0) = 0$ (grâce à (III.5)), et donc, d'après (III.6), en utilisant les notations (III.12),

$$\mathrm{Val}\, h_{j,k} \geq \nu - 1 - k \tag{III.15}$$

pour tout j,k. Écrivons maintenant que $\mathrm{Val}\,\dot{h} = \nu$. En appliquant $\frac{d}{dt}$ à (III.12), on obtient (avec la convention $h_{j,-1} = 0$, qui ne contredit pas (III.15)) :

$$d\dot{h} \;=\; \sum_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}} \left(\dot{h}_{j,k} + h_{j,k-1}\right) \omega_j^{(k)} \;,$$

qui, puisque $\dot{h}(0) = 0$, entraîne, en appliquant (III.6),

$$\nu \;=\; \mathrm{Val}\,\dot{h} \;=\; \min_{k\in\mathbb{N}, 1\leq j\leq m} k + 1 + \mathrm{Val}\left(\dot{h}_{j,k} + h_{j,k-1}\right) \;. \tag{III.16}$$

Par ailleurs, pour tout j,k, on a

$$\mathrm{Val}\,\dot{h}_{j,k} \geq \nu - k \quad \text{et} \quad \mathrm{Val}\,h_{j,k-1} \geq \nu - k \tag{III.17}$$

car la seconde inégalité vient de (III.15), la première est évidement vraie si $\mathrm{Val}\,\dot{h}_{j,k} \geq \nu$, et si $\mathrm{Val}\,\dot{h}_{j,k} < \nu$, le fait que $A_i = \varnothing$ pour $i < \nu$ entraîne $\mathrm{Val}\,\dot{h}_{j,k} \geq 1 + \mathrm{Val}\,h_{j,k}$, ce qui, avec (III.15), montre que la première inégalité est vraie dans ce cas aussi. Les inégalités (III.17) entraînent, à l'aide de (III.7),

$$k + 1 + \mathrm{Val}\left(\dot{h}_{j,k} + h_{j,k-1}\right) \geq \nu + 1$$

pour tout j,k. En reportant ceci dans (III.16), on obtient la contradiction $\nu \geq \nu + 1$.
■

III-3 Extension de Val à toutes les formes, matrices et opérateurs

Maintenant que l'on a défini la "valuation" (on utilise ce mot bien qu'on n'ait pas encore prouvé que "Val" définit bien une valuation sur $\mathcal{A}$) des fonctions, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{A}$, on l'étend sans mal à tous les objets plus généraux définis aux sections II-4 et II-5.

III-3.1 Valuation des opérateurs à coefficients formes

Définissons $\mathrm{Val} : \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, qui étend $\mathrm{Val} : \mathcal{A} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini plus haut.

Comme vu en (II.14), un élément de $\xi \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ s'écrit

$$\xi = \sum_{\substack{q,\lambda\in\mathbb{N} \\ (j_i,k_i)\in\{1,\dots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)<\cdots<(j_q,k_q)}} a_{\lambda,q,(j_1,k_1),\dots,(j_q,k_q)}\, \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \frac{d}{dt}^{\lambda} . \tag{III.18}$$

les $a_{\lambda,q,(j_1,k_1),\dots,(j_q,k_q)} \in \mathcal{A}$ étant définis de manière unique.

Définition III.3 *Pour tout $\xi \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, $\operatorname{Val}\xi$ est défini par*

$$\operatorname{Val}\xi \;=\; \min_{\substack{q,\lambda\in\mathbb{N} \\ (j_i,k_i)\in\{1,\dots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)<\cdots<(j_q,k_q)}} \operatorname{Val}(a_{\lambda,q,(j_1,k_1),\dots,(j_q,k_q)}) + \lambda + \sum_{i=1}^{q}(1+k_i) \tag{III.19}$$

où les $a_{\lambda,q,(j_1,k_1),\dots,(j_q,k_q)} \in \mathcal{A}$ sont définis par (III.18).

Il est clair que cette définition de Val coïncide avec la précédente sur $\mathcal{A} \subset \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ (un élément de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ de la forme (III.18) où tous les $a_{\lambda,q,(j_1,k_1),\dots,(j_q,k_q)}$ sont nuls sauf l'unique correspondant à $q = \lambda = 0$).

Un élément de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ étant assez abstrait, spécialisons cette définition aux éléments plus concrets que sont les formes différentielles et les opérateurs différentiels.

Opérateurs différentiels (scalaires): pour un élément de $\mathcal{A}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}]$, polynôme en $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ de degré $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\operatorname{Val}\left(\sum_{\lambda=0}^{K} a_\lambda \frac{d}{dt}^{\lambda}\right) \;=\; \min_{\lambda\in\{0,\dots,K\}} (\lambda + \operatorname{Val} a_\lambda) \tag{III.20}$$

où les coefficients a_λ sont dans $\mathcal{A}$.

Formes différentielles de degré 1 : pour $\eta = \sum_{(j,k)\in\{1,\dots,m\}\times\mathbb{N}} a_{j,k}\omega_j^{(k)} \in \Lambda^1(\mathcal{A})$, où les $a_{j,k}$ sont dans $\mathcal{A}$ (et la somme est finie), on a $\operatorname{Val}\eta = \min_{j,k}(1 + k + \operatorname{Val} a_{j,k})$.

Comme $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}]$-module libre, on peut aussi décomposer η comme

$$\eta \;=\; \sum_{j=1}^{m} P_j \bullet \omega_j$$

avec $P_j \in \mathcal{A}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}]$, et on a alors

$$\operatorname{Val}\eta = \min_{1\le j\le m} (1 + \operatorname{Val} P_j) \; . \tag{III.21}$$

Formes différentielles de degré $p \geq 2$: pour $\eta \in \Lambda^p(\mathcal{A})$, donné par

$$\eta = \sum_{\substack{(j_i,k_i)\in\{1,\ldots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)< \cdots <(j_p,k_p)}} a_{j_1,\ldots,j_p,k_1,\ldots,k_p} \wedge \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_p}^{(k_p)}$$

(somme finie), on a

$$\mathrm{Val}(\eta) = \min_{\substack{(j_i,k_i)\in\{1,\ldots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)< \cdots <(j_p,k_p)}} \{p + k_1 + \cdots + k_p + \mathrm{Val}(a_{j_1,\ldots,j_p,k_1,\ldots,k_p})\}. \tag{III.22}$$

Opérateurs différentiels à coefficients p-formes : pour $P \in \Lambda^p(\mathcal{A})[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}]$, donné par $P = \sum_{\lambda\in\mathbb{N}} \eta_\lambda \frac{d}{dt}^\lambda$ (somme finie), avec pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, $\eta_\lambda \in \Lambda^p(\mathcal{A})$,

$$\mathrm{Val}(P) = \min_{\lambda\in\mathbb{N}}\{\lambda + \mathrm{Val}(\eta_\lambda)\}. \tag{III.23}$$

III-3.2 Propriétés

La Proposition III.2 peut se généraliser à l'ensemble $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$:

Proposition III.4 *Pour tous g et h dans $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, on a :*

$$\begin{array}{rcrcll}
 & & \mathrm{Val}(g+h) & \geq & \min\{\mathrm{Val}(g), \mathrm{Val}(h)\}\ , & \text{(III.24)}\\
\mathrm{Val}(h) > \mathrm{Val}(g) & \Longrightarrow & \mathrm{Val}(g+h) & = & \mathrm{Val}(g)\ , & \text{(III.25)}\\
 & & \mathrm{Val}(g\wedge h) & \geq & \mathrm{Val}(g) + \mathrm{Val}(h)\ , & \text{(III.26)}\\
\mathrm{Val}(g) = 0 & \Longrightarrow & \mathrm{Val}(g\wedge h) & = & \mathrm{Val}(h)\ , & \text{(III.27)}\\
 & & \mathrm{Val}(\dot{g}) & \geq & 1 + \mathrm{Val}(g)\ . & \text{(III.28)}\\
 & & \mathrm{Val}(\mathrm{d}g) & \geq & \mathrm{Val}(g)\ . & \text{(III.29)}
\end{array}$$

<u>*Démonstration*</u> :

(III.29) est une conséquence très directe des définitions. En utilisant (III.18) et (III.19), le fait que, dans $g+h$, les coefficients de g et de h s'additionnent termes à termes et en appliquant (III.7) à l'addition de ces coefficients, on obtient l'inégalité **(III.24)**. Il en va de même pour l'égalité **(III.25)** en utilisant en plus (III.8).

Démonstration de (III.28). Soit $h \in \Lambda(\mathcal{A})$,

$$h = \sum_{\substack{q\in\mathbb{N} \\ (j_i,k_i)\in\{1,\dots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)<\cdots<(j_q,k_q)}} h_{q,j_1,\dots,j_q,k_1,\dots,k_q} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)}.$$

On utilise la notation $\dot{h}$ pour le résultat de l'application de l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ sur l'élément h.

$$\dot{h} = \sum_{\substack{q\in\mathbb{N} \\ \delta_0+\cdots+\delta_q=1 \\ (j_i,k_i)\in\{1,\dots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)<\cdots<(j_q,k_q)}} h^{(\delta_0)}_{q,j_1,\dots,j_q,k_1,\dots,k_q} \omega_{j_1}^{(k_1+\delta_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q+\delta_q)}.$$

Donc

$$\mathrm{Val}(\dot{h}) \geq \min_{\substack{q\in\mathbb{N} \\ \delta_0+\cdots+\delta_q=1 \\ (j_i,k_i)\in\{1,\dots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)<\cdots<(j_q,k_q)}} \{q + \sum_{i=1}^{q}(k_i+\delta_i) + \mathrm{Val}(h^{(\delta_0)}_{\lambda,q,j_1,\dots,j_q,k_1,\dots,k_q})\}$$

et d'après (III.11), $\mathrm{Val}(h^{(\delta_0)}_{\lambda,q,j_1,\dots,j_q,k_1,\dots,k_q}) \geq \delta_0 + \mathrm{Val}(h_{\lambda,q,j_1,\dots,j_q,k_1,\dots,k_q})$, d'où le résultat presque immédiatement.

Démonstration de (III.26). Montrons la propriété dans des cas plus restrictifs en premier lieu.

i). Soient $g \in \Lambda^q(\mathcal{A})$ et $h \in \Lambda^{q'}(\mathcal{A})$, avec

$$\begin{aligned} g &= \sum_{\substack{(j_i,k_i)\in\{1,\dots,m\}\times\mathbb{N} \\ (j_1,k_1)<\cdots<(j_q,k_q)}} g_{\substack{j_1,\dots,j_q \\ k_1,\dots,k_q}} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)}, \\ h &= \sum_{\substack{(j'_i,k'_i)\in\{1,\dots,m\} \\ (j'_1,k'_1)<\cdots<(j'_{q'},k'_{q'})}} h_{\substack{j'_1,\dots,j'_{q'} \\ k'_1,\dots,k'_{q'}}} \omega_{j'_1}^{(k'_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j'_{q'}}^{(k'_{q'})}. \end{aligned}$$

L'inégalité $\mathrm{Val}(g \wedge h) \geq \mathrm{Val}\, g + \mathrm{Val}\, h$ est entraînée par

$$\mathrm{Val}\left(g_{\substack{j_1,\dots,j_q \\ k_1,\dots,k_q}} h_{\substack{j'_1,\dots,j'_{q'} \\ k'_1,\dots,k'_{q'}}} \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \wedge \omega_{j'_1}^{(k'_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j'_{q'}}^{(k'_{q'})} \right) \geq \mathrm{Val}\, g + \mathrm{Val}\, h,$$

valable pour n'importe quelle valeur des indices, car $g \wedge h$ est un somme de termes comme celui dans le membre de gauche. L'inégalité ci-dessus est vraie car le membre de gauche est égal, par définition, à

$$\mathrm{Val}\left(g_{\substack{j_1,\dots,j_q \\ k_1,\dots,k_q}} h_{\substack{j'_1,\dots,j'_{q'} \\ k'_1,\dots,k'_{q'}}} \right) + \sum_{i=1}^{q} (1+k_i) + \sum_{i=1}^{q'} (1+k'_i) ,$$

et qu'en appliquant (III.9) au produit d'éléments de $\mathcal{A}$ qui apparaît, on minore la quantité ci-dessus par une quantité qui, par définition (III.22) de $\mathrm{Val}\, g$ et $\mathrm{Val}\, h$, est elle-même minorée par $\mathrm{Val}\, g + \mathrm{Val}\, h$.

ii). Soit h et g dans $\Lambda^q(\mathcal{A})$ et $\Lambda^{q'}(\mathcal{A})$ respectivement. Soit λ et μ dans $\mathbb{N}$. Considérons les monômes $h\frac{d}{dt}^{\mu}$ et $g\frac{d}{dt}^{\lambda}$ de $\Lambda^q(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et $\Lambda^{q'}(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ respectivement.

Alors $g\frac{d}{dt}^{\lambda} \wedge h\frac{d}{dt}^{\mu} = \displaystyle\sum_{i=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{i} (g \wedge h^{(i)}) \frac{d}{dt}^{\mu+\lambda-i}$ et en utilisant (III.24) sur le membre de droite on obtient

$$\mathrm{Val}(g\frac{d}{dt}^{\lambda} \wedge h\frac{d}{dt}^{\mu}) \geq \min_{i\in\{0,\dots,\lambda\}} \{\mathrm{Val}(g \wedge h^{(i)}\frac{d}{dt}^{\mu+\lambda-i})\}.$$

D'après (III.23) la valuation du i-ème terme dans le min vaut $\mu+\lambda-i+\mathrm{Val}(g \wedge h^{(i)})$, mais (III.9) entraîne $\mathrm{Val}(g \wedge h^{(i)}) \geq \mathrm{Val}(g) + \mathrm{Val}(h^{(i)})$ et (III.24) itéré i fois entraîne $\mathrm{Val}(h^{(i)}) \geq i + \mathrm{Val}(h)$ et (III-3.2) implique donc $\mathrm{Val}(g\frac{d}{dt}^{\lambda} \wedge h\frac{d}{dt}^{\mu}) \geq \mu + \lambda + \mathrm{Val}(g) + \mathrm{Val}(h)$, i.e.

$$\mathrm{Val}(g\frac{d}{dt}^{\lambda} \wedge h\frac{d}{dt}^{\mu}) \geq \mathrm{Val}(g\frac{d}{dt}^{\lambda}) + \mathrm{Val}(h\frac{d}{dt}^{\mu}).$$

iii). Soit $g = \displaystyle\sum_{\lambda\in\mathbb{N}} g_\lambda \frac{d}{dt}^{\lambda}$ et $h = \displaystyle\sum_{\mu\in\mathbb{N}} h_\mu \frac{d}{dt}^{\mu}$ dans $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, où les g_λ et les h_μ sont des formes homogènes.

Alors $\mathrm{Val}(g \wedge h) = \mathrm{Val}((\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathbb{N}} g_\lambda \frac{d}{dt}^{\lambda}) \wedge (\sum_{\mu\in\mathbb{N}} h_\mu \frac{d}{dt}^{\mu}))$,

donc $\mathrm{Val}(g \wedge h) \geq \mathrm{Val}(\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathbb{N}} \sum_{\mu\in\mathbb{N}} g_\lambda \frac{d}{dt}^{\lambda} \wedge h_\mu \frac{d}{dt}^{\mu})$

et avec (III.24), $\mathrm{Val}(g \wedge h) \geq \displaystyle\min_{\lambda,\mu\in\mathbb{N}} \{g_\lambda \frac{d}{dt}^{\lambda} \wedge h_\mu \frac{d}{dt}^{\mu}\}$.

Le point ii) permet ainsi de conclure que $\mathrm{Val}(g \wedge h) \geq \mathrm{Val}(g) + \mathrm{Val}(h)$.

iv). Soit $h = \sum_{i\in\mathbb{N}} h_i$ et $g = \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i$ dans $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ quelconques avec les h_i et les g_i des polynômes en $\frac{d}{dt}$ à coefficients formes homogènes.

$$\mathrm{Val}(g\wedge h) = \mathrm{Val}(\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} g_i \wedge h_j)$$

et avec (III.24) on obtient $\mathrm{Val}(g\wedge h) \geq \min_{i,j\in\mathbb{N}}\{\mathrm{Val}(g_i\wedge h_j)\}$ le point iii). permet alors de conclure la démonstration de (III.26).

Démonstration de (III.27). Soient g et h dans $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ avec $\mathrm{Val}\, g = 0$. Comme les seuls éléments homogènes $\zeta \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ tels que $\mathrm{Val}\,\zeta = 0$ sont dans $\mathcal{A}$, on a $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Val}\, g_0 = 0$, $\mathrm{Val}\, g_1 \geq 1$. Alors, comme $g\wedge h = g_0\wedge h + g_1 \wedge h$, il suffit, d'après (III.25) et (III.26), de montrer que $\mathrm{Val}(g_0 h) = \mathrm{Val}\, h$ (puisque $g_0 \in \mathcal{A}$, on préfère noter $g_0 h$ que $g\wedge h$). Si l'on décompose h comme en (III.18), on obtient la décomposition de $g_0 h$ en multipliant les coefficients fonctions ($a_{\lambda,q,(j_1,k_1),\ldots,(j_q,k_q)}$ dans (III.18)) par g_0; en appliquant (III.10) à ces produits de fonctions, les définitions (III.19) de $\mathrm{Val}\, h$ et $\mathrm{Val}(g_0 h)$ montrent qu'ils sont égaux. ■

III-3.3 Le cas des matrices

La valuation d'une matrice ou d'un vecteur d'opérateurs différentiels ou de formes (voir section II-5) sera simplement, par définition, la plus petite des valuations de ses éléments : pour $M \in \left(\Lambda^k(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ et $X \in \left(\Lambda^{k'}(\mathcal{A})\right)^m$, donnés par

$$M = [M_{i,j}]_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}}\ ,\ X = [X_i]_{1\leq i\leq m}\ ,$$

on a

$$\mathrm{Val}\, M \ = \ \min_{i,j} \mathrm{Val}\, M_{i,j}\ ,\ \mathrm{Val}\, X \ = \ \min_{i} \mathrm{Val}\, X_i\ , \tag{III.30}$$

où les $M_{i,j}$ sont dans $\Lambda^k(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et les X_i dans $\Lambda^{k'}(\mathcal{A})$, et relèvent donc de la section précédente.

L'essentiel des propriétés de la Proposition III.4 restent vraies en remplaçant les produits par des produits matriciels. Indiquons simplement précisément ce qui nous sera utile par la suite :

Proposition III.5 *Pour tous M, M' dans $\left(\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ et W, W' dans $\left(\Lambda^j(\mathcal{A})\right)^m$, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Val}(W+W') &\geq \min\{\mathrm{Val}\,W, \mathrm{Val}\,W'\}\ , && \text{(III.31)}\\
\mathrm{Val}(M+M') &\geq \min\{\mathrm{Val}\,M, \mathrm{Val}\,M'\}\ , && \text{(III.32)}\\
\mathrm{Val}(M\bullet W) &\geq \mathrm{Val}\,M + \mathrm{Val}\,W\ , && \text{(III.33)}\\
\mathrm{Val}(M\wedge M') &\geq \mathrm{Val}\,M + \mathrm{Val}\,M'\ , && \text{(III.34)}\\
\mathrm{Val}(\mathrm{d}M) &\geq \mathrm{Val}\,M \quad \textit{et} \quad \mathrm{Val}(\mathrm{d}W) \geq \mathrm{Val}\,W\ . && \text{(III.35)}
\end{aligned}$$

III-3.4 Notation $\mathcal{O}$

On utilisera pour Val la même notation “$\mathcal{O}$” introduite à la Définition I.12 pour l'ordre (pondéré) des séries. Pour $q \in \mathbb{N}$, le symbole $\mathcal{O}_q$ désigne n'importe quelle quantité (élément de $\mathcal{A}$, d'un $\Lambda^i(\mathcal{A})$, d'un $\Lambda^i(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, ou une matrice à coefficients dans l'un de ces ensembles) auquel Val assigne une valeur supérieure ou égale à q.

Par exemple, $g = h + \mathcal{O}_q$, ou $g + \mathcal{O}_q = h + \mathcal{O}_q$, ou $g - h = \mathcal{O}_q$ signifient que $\mathrm{Val}(g-h) \geq q$, mais aussi, si F est une application, $F(g+\mathcal{O}_q) = h + \mathcal{O}_r$ signifie que pour tout v tel que $\mathrm{Val}\,v \geq q$, on a $\mathrm{Val}(\,F(g+v) - h\,) \geq r$.

III-4 Indépendance de la fonction Val par rapport au choix de la base

On a défini jusqu'ici la fonction “Val” à l'aide d'une base (III.3) du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module $\Lambda^1(\mathcal{A})$. Dans ce paragraphe nous verrons que, bien que nous ne sachions pas donner de définition de la fonction Val sans avoir recours à une base, cette fonction elle-même ne dépend pas du choix de la base.

Pour deux bases $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ et $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, on note Val_η et Val_ω les deux fonctions a priori distinctes qui résultent de la construction précédente en utilisant chacune de ces bases. La proposition qui suit énonce que Val ne dépend pas de la base utilisée pour la définir.

Proposition III.6 *Soit $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ et $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ deux bases du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module $\Lambda^1(\mathcal{A})$, alors Val_η et Val_ω coïncident.*

Cette proposition permet d'utiliser maintenant la notation Val, indépendamment de la base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ choisie, sans aucune ambiguïté.

__Démonstration__: Montrons d'abord que Val_η et Val_ω coïncident sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$. Pour ceci, montrons, par récurrence sur i, que l'on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{R}_i \ : \ \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } h \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}], \text{ si il existe une base } \omega \text{ de } \Lambda^1(\mathcal{A}) \\ \text{telle que } \mathrm{Val}_\omega(h) \leq i\,, \\ \text{alors, pour toute base } \eta \text{ de } \Lambda^1(\mathcal{A}),\ \mathrm{Val}_\eta(h) = \mathrm{Val}_\omega(h). \end{array} \right.$$

$\mathcal{R}_0$ est vraie car pour tout élément h de $\mathcal{A}$ et toute base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, $\mathrm{Val}(h) = 0$ si et seulement si $h(0) \neq 0$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{R}_i$ vraie et, pour montrer que $\mathcal{R}_{i+1}$ l'est aussi, considérons $h \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ telle que $\mathrm{Val}_\omega\, h = i+1$, et η une autre base.

Tout d'abord, il est clair que $\mathrm{Val}_\eta(h) \geq \mathrm{Val}_\omega(h)$ (c'est-à-dire $\mathrm{Val}_\eta(h) \geq i+1$) car sinon, $\mathrm{Val}_\eta(h) \leq i$, ce qui permet d'appliquer $\mathcal{R}_i$ à h, avec η jouant le rôle d'ω, et d'obtenir $\mathrm{Val}_\omega(h) = \mathrm{Val}_\eta(h)$, ce qui serait absurde puisque $\mathrm{Val}_\omega\, h = i+1$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Val}_\eta(h) \leq \mathrm{Val}_\omega(h)$. On peut bien sûr écrire

$$h \ = \ \sum_{j=0}^{J} h_j \frac{d}{dt}^j \ , \quad h_j \in \mathcal{A}\,,$$

et, d'après (III.20), $\mathrm{Val}_\omega(h) = \min\limits_{0\leq j\leq J} (j + \mathrm{Val}_\omega\, h_j)$. Distinguons deux cas.

- Si ce minimum est atteint pour au moins un entier $j \neq 0$, alors, pour cet entier j, on a $\mathrm{Val}_\omega(h_j) = i+1-j \leq i$, on peut donc appliquer $\mathcal{R}_i$ à h_j avec la base ω pour obtenir $\mathrm{Val}_\eta\, h_j = i+1-j$, ce qui entraîne $\mathrm{Val}_\eta\, h \leq \mathrm{Val}_\omega\, h$.
- Sinon, on a $\mathrm{Val}_\omega\, h_j > i+1-j$ pour tout $j \geq 1$ et $\mathrm{Val}_\omega\, h_0 = \mathrm{Val}_\omega\, h = i+1$. Ceci implique, d'après (III.5), que $h_0(0) = 0$; alors, d'après (III.6), si l'on écrit

$$dh_0 \ = \sum_{k\in\{1,\ldots,m\}} a_k \bullet \omega_k \ = \sum_{k\in\{1,\ldots,m\}} b_k \bullet \eta_k \ ,$$

avec a_b,$b_k \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ (ce sont des opérateurs différentiels), on a, d'après (III.6) (voir aussi (III.21)) :

$$\mathrm{Val}_\omega\, h_0 \ = \ \mathrm{Val}_\omega\, dh_0 \ = \ \min_{1\leq k\leq m} (1 + \mathrm{Val}_\omega\, a_k)\ , \qquad \text{(III.36)}$$

$$\mathrm{Val}_\eta\, h_0 \ = \ \mathrm{Val}_\eta\, dh_0 \ = \ \min_{1\leq k\leq m} (1 + \mathrm{Val}_\eta\, b_k)\ . \qquad \text{(III.37)}$$

Soient $p_{k,j}$ et $q_{k,j}$ les éléments de $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$ qui donnent le changement de base :

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{m} p_{k,j} \bullet \omega_j\ , \quad \omega_k = \sum_{j=1}^{m} q_{k,j} \bullet \eta_j\ , \quad k = 1,\ldots,m\ . \qquad \text{(III.38)}$$

On a clairement, pour tout k,

$$a_k = \sum_{\ell=1}^{m} b_\ell \, q_{\ell,k} \ , \qquad b_k = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \, p_{\ell,k} \ . \tag{III.39}$$

Alors, d'après (III.24), (III.36) entraîne

$$i+1 \ = \ \mathrm{Val}_\omega \, h_0 \ \ \geq \ \ 1 + \min_{k,\ell \in \{1,\ldots,m\}} (\mathrm{Val}_\omega \, b_\ell + \mathrm{Val}_\omega \, q_{\ell,k}) \ ;$$

il existe donc au moins un $\bar{\ell} \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $\mathrm{Val}_\omega \, b_{\bar{\ell}} \leq i$, et on peut appliquer $\mathcal{R}_i$ à ce $b_{\bar{\ell}}$ pour obtenir $\mathrm{Val}_\eta \, b_{\bar{\ell}} = \mathrm{Val}_\omega \, b_{\bar{\ell}}$, et donc $\mathrm{Val}_\eta \, b_{\bar{\ell}} \leq i$. D'après (III.37), cela entraîne $\mathrm{Val}_\eta \, h_0 \leq i+1$, et donc, puisque $\mathrm{Val}_\eta \, h \leq \mathrm{Val}_\eta \, h_0$ et $\mathrm{Val}_\omega \, h = i+1$, on a bien montré que $\mathrm{Val}_\eta \, h \leq \mathrm{Val}_\omega \, h$ dans ce cas aussi

Ceci achève de prouver que $\mathcal{R}_i$ est vrai pour tout i et donc que, pour tout $h \in \mathcal{A}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}]$, l'entier $\mathrm{Val}_\epsilon \, h$ est indépendant de la base ϵ de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ que l'on choisit. On considère désormais un élément général $\xi \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$. Pour montrer que $\mathrm{Val}_\epsilon \, \xi$ est aussi indépendant de la base ϵ, ce qui terminera la preuve de la proposition, il suffit de montrer que, étant donné deux bases ω et η, on a $\mathrm{Val}_\eta \, \xi \geq \mathrm{Val}_\omega \, \xi$ (η et ω jouant ici des rôles symétriques, l'inverse aura lieu aussi).

Montrons donc que l'on a $\mathrm{Val}_\eta \, \xi \geq \mathrm{Val}_\omega \, \xi$. Pour cela, on écrit, comme en (III.18),

$$\xi = \sum_{\substack{\lambda,q \in \mathbb{N} \\ (j_i,k_i) \in \{1,\ldots,m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1,k_1) < \cdots < (j_q,k_q)}} h_{j_1,\ldots,j_q,k_1,\ldots,k_q,\lambda,q} \, \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \frac{d}{dt}^{\lambda} \tag{III.40}$$

avec les $h_{j_1,\ldots,j_q,k_1,\ldots,k_q,\lambda,q}$ dans $\mathcal{A}$, si bien que, d'après la première partie de la preuve, on peut noter

$$\mathrm{Val}_\omega \, h_{j_1,\ldots,j_q,k_1,\ldots,k_q,\lambda,q} \ = \ \mathrm{Val}_\eta \, h_{j_1,\ldots,j_q,k_1,\ldots,k_q,\lambda,q} \ = \ \mathrm{Val} \, h_{j_1,\ldots,j_q,k_1,\ldots,k_q,\lambda,q} \ .$$

Alors, d'après (III.19) et (III.40), on a

$$\mathrm{Val}_\omega \, \xi \ = \ \min_{\substack{\lambda,q \in \mathbb{N} \\ (j_i,k_i) \in \{1,\ldots,m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1,k_1) < \cdots < (j_q,k_q)}} \left(\mathrm{Val} \left(h_{j_1,\ldots,j_q,k_1,\ldots,k_q,\lambda,q} \right) + \lambda + \sum_{i=1}^{q} (1+k_i) \right) \ .$$

Par ailleurs, d'après (III.24) et (III.26), valables dans toutes les bases, on a

$$\mathrm{Val}_\eta \, \xi \ \geq \ \min_{\substack{\lambda,q \in \mathbb{N} \\ (j_i,k_i) \in \{1,\ldots,m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1,k_1) < \cdots < (j_q,k_q)}} \left(\mathrm{Val}\left(h_{j_1,\ldots,j_q,k_1,\ldots,k_q,\lambda,q} \right) + \mathrm{Val}_\eta \left(\omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_q}^{(k_q)} \frac{d}{dt}^{\lambda} \right) \right) .$$

Ceci et l'expression de $\mathrm{Val}_\omega\,\xi$ entraînent bien $\mathrm{Val}_\eta\,\xi \geq \mathrm{Val}_\omega\,\xi$ car, en utilisant (III.28), (III.26) et le fait que $\mathrm{Val}\,\omega_i \geq 1$ dans n'importe quelle base, on obtient

$$\mathrm{Val}_\eta\left(\omega_{j_1}^{(k_1)}\wedge\ldots\wedge\omega_{j_q}^{(k_q)}\,\frac{d}{dt}^{\lambda}\right) \geq \lambda + \sum_{i=1}^{q}(1+k_i). \qquad \blacksquare$$

III-5 Coordonnées adaptées

III-5.1 Définition

On va d'abord fixer une notation. Soit

$$\mathbf{Y} \;=\; \{Y_j^k\}_{1\leq j\leq m,k\in\mathbb{N}}$$

un ensemble d'indéterminées, et $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$ l'anneau de séries défini à la section I-2. C'est l'exemple évoqué pages 17 et 20, et on choisit, comme dans cet exemple, de donner à chaque variable y_j^k le poids

$$\pi(y_j^k) = k+1\ . \tag{III.41}$$

On note

$$\mathbf{o}\ :\ \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]] \to \mathbb{N}\cup\{\infty\} \tag{III.42}$$

l'ordre pondéré (cf. section I-4) sur cet anneau de séries formelles associé au poids (III.41).

Rappelons (voir section I-5) que, si $\mathbf{y} = (y_j^k)_{1\leq j\leq m,\,k\in\mathbb{N}}$ est une famille de séries[1] de x,u,$\dot{u}$... (c'est-à-dire $y_j^k \in \mathcal{A}$ pour tout j,k), alors, pour tout $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, on désigne par $h(\mathbf{y}) \in \mathcal{A}$ la série obtenue en substituant chaque indéterminée y_j^k par la série $y_j^k \in \mathcal{A}$. On peut alors définir, à l'aide de la fonction $\mathrm{Val} : \mathcal{A} \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, une fonction $\mathrm{Val}_\mathbf{y} : \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]] \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ par

$$\mathrm{Val}_\mathbf{y}\,h \;=\; \mathrm{Val}\big(h(\mathbf{y})\big) \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]\ . \tag{III.43}$$

Si la famille $\mathbf{y}$ forme un *système de coordonnées* sur $\mathcal{A}$ (voir Définition I.17), il existe une famille d'éléments de $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, que l'on peut noter $\mathbf{y^{-1}} = (\zeta_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ (l'équation (II.4) définit l'ensemble Υ), telle que la substitution par $\mathbf{y^{-1}}$ "inverse" la substitution par $\mathbf{y}$, et vice-versa : $h \mapsto h(\mathbf{y})$ définit un isomorphisme de $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]] \to \mathcal{A}$,

1. Comme il a été dit dans la note du bas de la page 24, les notations générales de la section I-5, où les indéterminées n'étaient pas "numérotées" conduiraient à noter $y_{y_j^k}$ les séries de la famille $\mathbf{y}$; on utilise ici la notation plus légère y_j^k.

et $g \mapsto g(\mathbf{y^{-1}})$ l'isomorphisme inverse $\mathcal{A} \to \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$. Dans cas, $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}$ vérifie, comme Val, les propriétés (III.4) et (III.7) à (III.10), ce qui en fait "presque" une valuation sur $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, et l'on peut aussi "transporter" l'ordre $\mathbf{o}$, qui est lui-même une valuation sur $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, en une valuation sur $\mathcal{A}$ définie par $\mathbf{o}_{\mathbf{y}}(g) = \mathbf{o}\left(h(\mathbf{y^{-1}})\right)$. On va rechercher des coordonnées $\mathbf{y}$ telles que Val coïncide avec cette valuation $\mathbf{o}_{\mathbf{y}}$, ou de manière équivalente telles que $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}$ coïncide avec $\mathbf{o}$.

Définition III.7 *On dit qu'une famille* $\mathbf{y} = \{y_j^k\}_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}}$ *est un système de* ***coordonnées adaptées*** *si et seulement si*

1. *c'est un système de coordonnées sur* $\mathcal{A}$*, au sens de la Définition I.17,*
2. $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}$*, défini par (III.43), coïncide avec* $\mathbf{o}$*,*
   c'est-à-dire que l'on a $\mathbf{o}(h) = \mathrm{Val}\left(h(\mathbf{y})\right)$ *pour tout* $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$*.*

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que des coordonnées soient adaptées. C'est l'outil pratique utile pour construire des coordonnées adaptées après avoir construit une base. La section suivante explique pourquoi il existe toujours des coordonnées vérifiant cette condition suffisante, mais leur construction est en général aisée.

Proposition III.8 *Si* $\mathbf{y} = \{y_j^k\}_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}}$ *forme un système de coordonnées sur* $\mathcal{A}$*, et si, pour tout* $j \in \{1,\ldots,m\}$ *et* $k \in \mathbb{N}$*, on a*

$$dy_j^k \;=\; \omega_j^{(k)} \;+\; \mathcal{O}_{k+2} \tag{III.44}$$

(c'est-à-dire $\mathrm{Val}(dy_j^k - \omega_j^{(k)}) \;\geq\; k+2$*), alors* $\mathbf{y}$ *est un système de coordonnées adaptées.*

Montrons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme III.9 *Si* $\mathbf{y} = \{y_j^k\}_{1\leq j\leq m, k\in\mathbb{N}}$ *forme un système de coordonnées sur* $\mathcal{A}$ *et vérifie (III.44) pour tout j,k, alors, pour tout* $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$ *tel que* $h(0)=0$*,* $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}(h) = \min\limits_{\substack{1\leq j\leq m\\ k\in\mathbb{N}}} \{k+1+\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}(\dfrac{\partial h}{\partial y_j^k})\}$.

<u>Démonstration</u> de la proposition : Si $h(0) \neq 0$, $\mathbf{o}(h)$ et $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}(h)$ sont tous les deux nuls. Une récurrence très simple fondée sur le lemme ci-dessus et la proposition I.9 étend $\mathbf{o}(h) = \mathrm{Val}_{\mathbf{y}}(h)$ à tout $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$. ■

<u>*Démonstration*</u> *du lemme.* Définissons des $\eta_{j,k} \in \Lambda^1(\mathcal{A})$ et des $a_{j,k,i,l} \in \mathcal{A}$, pour tout j et i dans $\{1,\ldots,m\}$ et tout k et l dans $\mathbb{N}$ par :

$$dy_j^k = \omega_j^{(k)} + \eta_{j,k} \quad , \qquad \eta_{j,k} = \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ l\in\mathbb{N}}} a_{j,k,i,l}\,\omega_i^{(l)} \ , \tag{III.45}$$

avec $\mathrm{Val}(\eta_{j,k}) \geq k+2$, d'où, pour tous i,j,k,l,

$$\mathrm{Val}(a_{j,k,i,l}) \geq k+1-l \ . \tag{III.46}$$

Soit maintenant $h \in \mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, tel que $h(0)=0$. D'après (I.39) et (III.45), on a

$$\mathrm{d}\,(\,h(\mathbf{y})\,) = \sum_{\substack{1\leq j\leq m \\ k\in\mathbb{N}}} \left(\frac{\partial h}{\partial y_j^k}(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ l\in\mathbb{N}}} a_{i,l,j,k}\, \frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y}) \right) \omega_j^{(k)} \ ,$$

et donc, d'après (III.5),

$$\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}\, h = \mathrm{Val}\, h(\mathbf{y}) = \min_{\substack{1\leq j\leq m \\ k\in\mathbb{N}}} \ k+1+\mathrm{Val}\left(\frac{\partial h}{\partial y_j^k}(\mathbf{y}) + \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ l\in\mathbb{N}}} a_{i,l,j,k}\, \frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y}) \right) \ . \tag{III.47}$$

Posons

$$H = \min_{\substack{1\leq j\leq m \\ k\in\mathbb{N}}} \{k+1+\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}(\frac{\partial h}{\partial y_j^k})\} = \min_{\substack{1\leq j\leq m \\ k\in\mathbb{N}}} \{k+1+\mathrm{Val}\left(\frac{\partial h}{\partial y_j^k}(\mathbf{y})\right)\} \ .$$

On doit montrer $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}\, h = H$. D'après (III.7), (III.47) implique clairement que $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}(h) \geq H$. Montrons l'inégalité inverse. Tout d'abord, (III.7), (III.9) et (III.46) entraînent, pour tous j,k,

$$\mathrm{Val}\left(\sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ l\in\mathbb{N}}} a_{i,l,j,k}\, \frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y}) \right) \geq \min_{\substack{1\leq i\leq m \\ l\in\mathbb{N}}} l+1-k+\mathrm{Val}\left(\frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y})\right) = -k+H \ . \tag{III.48}$$

Considérons maintenant des indices $\bar{\jmath}$ et $\bar{k}$ tels que

$$\bar{k}+1+\mathrm{Val}\left(\frac{\partial h}{\partial Y_{\bar{\jmath}}^{\bar{k}}}(\mathbf{y})\right) \;=\; \min_{\substack{1\le j\le m\\ k\in\mathbb{N}}} k+1+\mathrm{Val}\left(\frac{\partial h}{\partial y_j^k}(\mathbf{y})\right) \;=\; H\ .$$

Ceci entraîne, d'après (III.48) (avec $k=\bar{k}$) et (III.8),

$$\mathrm{Val}\left(\frac{\partial h}{\partial Y_{\bar{\jmath}}^{\bar{k}}}(\mathbf{y}) \;+\; \sum_{\substack{1\le i\le m\\ l\in\mathbb{N}}} a_{i,l,\bar{\jmath},\bar{k}}\,\frac{\partial h}{\partial Y_i^l}(\mathbf{y})\right) \;=\; \mathrm{Val}\left(\frac{\partial h}{\partial Y_{\bar{\jmath}}^{\bar{k}}}(\mathbf{y})\right) \;=\; H-\bar{k}-1\ ,$$

et donc, avec (III.47), $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}\, h \le \bar{k}+1+\mathrm{Val}\left(\frac{\partial h}{\partial Y_{\bar{\jmath}}^{\bar{k}}}(\mathbf{y})\right) = H$. ■

III-5.2 Construction de coordonnées adaptées

Nous allons maintenant voir que ces coordonnées adaptées existent sous les hypothèses faites au début de ce chapitre.

Cette construction se fait en trois étapes : des coordonnées particulières sont construites dans les deux lemmes suivants (III.10 et III.11), puis des coordonnées adaptées en sont déduites dans la Proposition III.12.

Dans la plupart des cas, les coordonnées $x,u,\dot{u},\ldots$, ou des coordonnées déduites aisément des précédentes (prendre quelques contrôles comme états supplémentaires et leurs dérivées comme contrôles) ont déjà les propriétés du lemme suivant. Par exemple, dans le cas de la Proposition II.6, $x,u,\dot{u},\ldots$ convient si $\sigma=0$: pour les ξ_j^k, $1\le j\le m$, $0\le k\le \rho-1$ prendre les x_i, et pour $k\ge\rho$, prendre $\xi_j^k=u_j^{(k-\rho)}$, et si $\sigma>0$, il suffit de prendre σ contrôles comme nouveaux états pour se ramener au cas $\sigma=0$. Le lemme suivant donne ces coordonnées généralement, à partir d'une base du module des différentielles. Noter qu'entre autre, les propriétés de ces coordonnées sont telles que $X=(\xi_j^k)_{\substack{1\le j\le m\\ 0\le k\le K-1}}$ peut être pris comme état et $(\xi_1^K,\ldots,\xi_m^K)$ comme contrôle c'est-à-dire que le système de contrôle s'écrit $\dot{X}=F(X,U)$.

Lemme III.10 *Si $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module libre de base $\{\omega_j\}_{1\le j\le m}$, alors il existe $K\in\mathbb{N}$ et $\{\xi_j^k\}_{1\le j\le m,k\in\mathbb{N}}$ des coordonnées de $\mathcal{A}$ telles que*

– *Pour tout $k\in\{0,\ldots,K-1\}$, $\dot{\xi}_j^k$ est fonction des $\{\xi_j^k\}_{\substack{1\le j\le m\\ 0\le k\le K}}$ seulement,* *et pour tout entier $p \geq K$,*

- *on a la relation* $\xi_j^{p+1} = \dot{\xi}_j^p$,
- $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq p}}$ *est une base du sous-$\mathcal{A}$-module de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ engendré par* $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq p}}$.

<u>*Démonstration*</u> *du lemme III.10 :* $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ k \in \mathbb{N}}}$ est une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}$ donc $\{\omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \omega_{j_2}^{(k_2)}\}_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,,k_2) \in \{1,\ldots,m\} \times \mathbb{N} \\ (j_1,k_1) < (j_2,,k_2)}}$ est une base de $\Lambda^2(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}$, donc pour tout $j \in \{1, \ldots ,m\}$,

$$\mathrm{d}\omega_j = \sum_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,,k_2) \in \{1,\ldots,m\} \times \{0,\ldots,L\} \\ (j_1,k_1) < (j_2,,k_2)}} a_{j,j_1,j_2,k_1,k_2}\, \omega_{j_1}^{(k_1)} \wedge \omega_{j_2}^{(k_2)}.$$

On appelle L l'entier défini par $L = \max\{\{k_1 | a_{j,j_1,j_2,k_1,k_2} \neq 0\},\{k_2 | a_{j,j_1,j_2,k_1,k_2} \neq 0\}\}$.

En appliquant $2L$ fois $\frac{d}{dt}$ à l'expression ci-dessus de $\mathrm{d}\omega_j$, on obtient

$$\mathrm{d}\omega_j^{(2L)} = \sum_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,,k_2) \in \{1,\ldots,m\} \times \mathbb{N}, \\ (j_1,k_1) < (j_2,,k_2), \\ q \in \{0,\ldots,2L\}}} \binom{2L}{q}\, a_{j,j_1,j_2,k_1,k_2}^{(2L-q)} \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r}\, \omega_{j_1}^{(k_1+r)} \wedge \omega_{j_2}^{(k_2+q-r)}.$$

Si $r \leq L$, alors $k_1 + r \leq 2L$ et si $r > L$, alors $k_2 + q - r \leq 2L$, ainsi $\mathrm{d}\Omega_j^{(2L)}$ congrue à 0 modulo $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq 2L}}$. On obtient par intégration que pour tout $j \in \{1, \ldots ,m\}$ et tout $k \in \{0, \ldots ,2L\}$, $\mathrm{d}\Omega_j^{(k)}$ congrue à 0 modulo $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq 2L}}$. On peut alors appliquer le théorème de Frobenius pour $K = 2L$ à $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$, il existe donc $\{\xi_j^k\}_{1 \leq j \leq m, k \in \mathbb{N}}$ un système de coordonnées de $\mathcal{A}$ tel que $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ et $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ sont deux bases du même sous-$\mathcal{A}$-module de $\Lambda^1(\mathcal{A})$. Nous pourrions appliquer le théorème de Frobenius pour tout $p \geq K$ pour obtenir le premier point, cependant, construisons plutôt les coordonnées de façon à obtenir le deuxième point du lemme, le premier point du lemme sera alors obtenu de façon évidente. Considérons maintenant le module engendré par $\{\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}},\{d\dot{\xi}_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m, \\ 0 \leq k \leq K}}\}$, une base naturelle de ce module est d'après ce qui précède $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K+1}}$, on peut donc extraire m formes indépendantes parmi les $\{d\dot{\xi}_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ telles que ces m formes plus les $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq K}}$ en forment une base.

Considérons, quitte à changer les indices, que ces m formes sont $\{d\dot{\xi}_j^K\}_{1\leq j\leq m}$. Il ne reste qu'à poser $\xi_j^{K+1}=\dot{\xi}_j^K$ pour $j\in\{1,\ldots,m\}$ et nous obtenons le deuxième point pour $p=K$. Montrons dans le cas $p\geq K$ la propriété par récurrence. Soit $\mathcal{R}_i$ la propriété de récurrence sur i suivante.

$\mathcal{R}_i$: { Pour tout $j\in\{1,\ldots,m\}$, $\xi_j^{K+1+i}=\dot{\xi}_j^{K+i}$.

$\{d\xi_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K+i}}$ et $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K+i}}$ sont deux bases du même sous-$\mathcal{A}$-module de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ et seuls les $d\xi_j^{K+i}$ dépendent des $\omega_j^{(K+i)}$. }

$\mathcal{R}_0$: vrai d'après ce qui précède. Soit $i\in\mathbb{N}$, supposons $\mathcal{R}_i$ vérifiée. En différentiant les relations entre les ξ_j^k et les $\omega_j^{(k)}$, on obtient que $\{\{d\xi_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K+i}},\{d\dot{\xi}_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K+i}}\}$ génère le même module que $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K+i+1}}$. Or $\{\omega_j^{(k)}\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K+i+1}}$ forme une base, donc on peut extraire m éléments de $\{d\dot{\xi}_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K+i}}$ tels que ces m formes plus les $\{d\xi_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K+i}}$ forment une base. Comme seuls les $d\xi_j^{K+i}$ dépendent des $\omega_j^{(K+i)}$, ces m formes extraites sont les $d\dot{\xi}_j^{K+i}$, en posant $\xi_j^{K+i+1}=\dot{\xi}_j^{K+i}$ on obtient $\mathcal{R}_{i+1}$. Par principe de récurrence, le lemme est vrai ■

Le lemme suivant est un corollaire du lemme précédent.

Lemme III.11 *Si $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module libre de base $\{\omega_j\}_{1\leq j\leq m}$, alors il existe $K\in\mathbb{N}$ et des coordonnées $\{z_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\k\in\mathbb{N}}}$ de $\mathcal{A}$ telles que :*

- *Pour tout $k\geq K$, $\dot{z}_j^k=z_j^{k+1}$.*
- *Pour tout $k\in\{0,\ldots,K-1\}$, $\dot{z}_j^k$ est fonction des $\{z_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K}}$ seulement.*
- *Pour tout $k\in\mathbb{N}$,*

$$dz_j^k=\omega_j^{(k)}+\sum_{\substack{1\leq j'\leq m\\k'\in\mathbb{N}}}a_{j,k,j',k'}\omega_{j'}^{(k')},\tag{III.49}$$

avec $\mathrm{Val}(a_{j,k,j',k'})\geq 1$.

<u>*Démonstration*</u> *du lemme III.11 :* On utilise tout d'abord le lemme III.10 et on effectue une transformation linéaire à coefficients constants aux $\{\xi_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\0\leq k\leq K}}$ pour

obtenir les $\{z_j^k\}_{\substack{1\le j\le m\\ 0\le k\le K}}$: pour

$$\omega_j^{(k)} = \sum_{\substack{1\le j'\le m\\ k'\in\mathbb{N}}} \alpha_{j,k,j',k'} d\xi_{j'}^{k'}, \tag{III.50}$$

la somme étant finie. On pose

$$z_j^k = \sum_{\substack{1\le j'\le m\\ k'\le K}} \alpha_{j,k,j',k'}(0)\xi_{j'}^{k'}. \tag{III.51}$$

Le premier point du lemme III.10 nous assure que la matrice des $\alpha_{j,k,j',k'}(0)$ est de rang plein. On pose de plus pour $k \geq K$, $z_j^{k+1} = \dot{z}_j^k$. Ainsi les z_j^k forment bien un système de coordonnées de $\mathcal{A}$. Les trois points du lemme viennent alors aisément. Le premier point est obtenu par construction des z_j^k pour $k \geq K$. Les z_j^k pour $k \leq K-1$ sont dans le module engendré par les ξ_j^k pour $k \leq K$, donc en ré-exprimant les ξ_j^k en fonction des z_j^k on obtient le deuxième point. Pour obtenir le troisième point il suffit alors de différentier (III.51), $dz_j^k = \sum_{\substack{1\le j'\le m\\ k'\le K}} \alpha_{j,k,j',k'}(0)d\xi_{j'}^{k'}$. Or pour $k \leq K$, $\omega_j^{(k)} = \sum_{\substack{1\le j'\le m\\ k'\le K}} \alpha_{j,k,j',k'} d\xi_{j'}^{k'}$, donc $\omega_j^{(k)} = dz_j^k + \sum_{\substack{1\le j'\le m\\ k'\in\mathbb{N}}} b_{j,k,j',k'} d\xi_{j'}^{k'}$, avec $\mathrm{Val}(b_{j,k,j',k'}) \geq 1$. Il suffit alors de remplacer les $d\xi_j^k$ par leur expression en fonction des $\omega_j^{(k)}$ pour obtenir le troisième point pour $k \leq K$. Un simple calcul (en utilisant le lemme III.11 appliqué aux $a_{j,k,j',k'}$) permet de conclure la démonstration pour $k \geq K+1$ ■

La proposition suivante donne une construction de coordonnées qui vérifient les conditions de la Proposition III.8, et sont donc des coordonnées adaptées.

Proposition III.12 *Si $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est un un $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module libre, il existe des coordonnées $\{y_j^k\}_{1\le j\le m, k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ qui vérifient les conditions de la Proposition III.8.*

Démonstration : On va d'abord construire les y_j^k de proche en proche pour k croissant de 0 à $K-1$. Précisément, démontrons la propriété $\mathcal{R}_q$ suivante pour

$1 \le q \le K$:

$$\mathcal{R}_q \ : \ \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des coordonnées } \{\{y_j^k\}_{\substack{1\le j\le m \\ 0\le k\le q-1}}, \{z_j^k\}_{\substack{1\le j\le m \\ k\ge q}}\} \text{ sur } \mathcal{A} \text{ telles que} \\ \text{tous les } y_j^k, \text{ pour } k \in \{0,\ldots,q-1\}, \text{ vérifient (III.44) et} \\ \text{(III.49) est vérifiée pour tout } k \ge q, \text{ et} \\ \mathrm{Val}(z_j^k) \ge q+1 \text{ pour tout } k \in \{q,\ldots,K\}\ . \end{array} \right.$$

On part des coordonnées (z_j^k) qui satisfont les trois propriétés de la conclusion du Lemme III.11. Si l'on prend $y_j^0 = z_j^0$ et que l'on ne modifie pas les autres z_j^k, $\mathcal{R}_1$ est satisfaite; en particulier, les y_j^0 satisfont (III.44) pour $k=0$ car, dans (III.49), la somme est bien de valuation supérieure ou égale à deux.

Supposons maintenant que $\mathcal{R}_q$ est vraie pour un entier $q \in \{1,\ldots,K-1\}$, et établissons $\mathcal{R}_{q+1}$. On montre tout d'abord que $\mathcal{R}_q$ entraîne la propriété suivante, où $\eta(0)=0$ pour $\eta \in \Lambda^1(\mathcal{A})$ signifie que, dans une décomposition sur une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en tant que $\mathcal{A}$-module, tous les coefficients sont des séries non inversibles :

$$\begin{array}{l} \text{pour tout } \eta \in \Lambda^1(\mathcal{A}) \text{ tel que } \eta(0)=0 \text{ et } \mathrm{Val}(\eta) \ge q+1 \text{ et } \mathrm{Val}(\mathrm{d}\eta) \ge q+2\ , \\ \text{il existe } p, \text{ un polynôme homogène (au sens de la section I-4.2,} \\ \text{avec les poids (III.41)) de degré } q+1 \\ \text{en les variables } \{y_j^k\}_{\substack{1\le j\le m \\ 0\le k\le q-1}} \text{ seulement, tel que } \ \eta = \mathrm{d}p + \mathcal{O}_{q+2}\ . \end{array} \tag{III.52}$$

En effet, puisque les éléments ci-dessus forment des coordonnées, leurs différentielles forment une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ comme $\mathcal{A}$-module, si bien que l'on peut écrire

$$\eta \ = \sum_{\substack{1\le j'\le m \\ 0\le k'\le q-1}} \mu_{j',k'}\, dy_{j'}^{k'} + \sum_{\substack{1\le j'\le m \\ k'\ge q}} \nu_{j',k'}\, dz_{j'}^{k'}\ .$$

Chaque $\nu_{j',k'}$ est de valuation au moins 1 (car non inversible), et $\mathrm{Val}(dz_{j'}^{k'}) \ge q+1$, donc chaque terme de la seconde somme, et donc cette somme (finie) elle-même, est de valuation au moins $q+2$ donc cette seconde somme rentre dans le $\mathcal{O}_{q+2}$. Dans la première, chaque $\mu_{j',k'} \in \mathcal{A}$ peut s'écrire, après substitution, comme une série en un nombre fini de variables parmi $\{\{y_j^k\}_{\substack{1\le j\le m \\ 0\le k\le q-1}}, \{z_j^k\}_{\substack{1\le j\le m \\ k\ge q}}\}$, et l'on peut décomposer cette série en deux parties : $\mu_{j',k'} = \mu_{j',k'}^0 + \mu_{j',k'}^1$ où $\mu_{j',k'}^0$ contient tous les monômes qui ne contiennent que les y_j^k, et $\mu_{j',k'}^1$ tous les autres; on peut clairement mettre au moins un z_j^k en facteur dans chaque monôme de $\mu_{j',k'}^1$ et finalement écrire $\mu_{j',k'}^1 =$

$\sum_{\text{finie}} z_j^k s_j^k$ avec les s_j^k des séries, et donc, comme $\operatorname{Val} z_j^k \geq q+1$, on a $\operatorname{Val} \mu^1_{j',k'} \geq q+1$, et cela entraîne finalement, comme $\operatorname{Val} y_{j'}^{k'} \geq 1$, que la contribution des $\mu^1_{j',k'}$ à la première somme est de valuation au moins $q+2$. Finalement, on peut écrire $\mu^0_{j',k'} = \mu^{00}_{j',k'} + \mu^{01}_{j',k'}$, où $\mu^{00}_{j',k'}$ contient les monômes de degré (pondéré) $\leq q+1$ et $\mu^{01}_{j',k'}$ ceux de degré (pondéré) $\geq q+2$, et le contribution des $\mu^{01}_{j',k'}$ à la première somme est donc aussi de valuation au moins $q+2$. Ceci entraîne

$$\eta \;=\; \sum_{\substack{1\leq j'\leq m\\ 0\leq k'\leq q-1}} \mu^{00}_{j',k'}\, dy_{j'}^{k'} \;+\; \mathcal{O}_{q+2}\ ,$$

où chaque $\mu^{00}_{j',k'}$ est un *polynôme* en les variables $\{y_j^k\}_{\substack{1\leq j\leq m\\ 0\leq k\leq q-1}}$, homogène de degré $q+1$. L'hypothèse implique

$$\sum_{\substack{1\leq j'\leq m\\ 0\leq k'\leq q-1}} \mathrm{d}\mu^{0,0}_{j',k'} \wedge dy_{j'}^{k'} \;=\; \mathcal{O}_{q+2}$$

mais avec ces coordonnées, cette différentielle est soit nulle soit homogène de degré $q+1$, elle est donc nulle, et le lemme de Poincaré parmi les polynômes homogènes (voir section I-4.5) donne alors l'existence d'un polynôme p tel que $\mathrm{d}p = \sum \mu^{00}_{j',k'}\, dy_{j'}^{k'}$, et finalement qui vérifie la propriété demandée en (III.52).

Utilisons maintenant (III.52) pour prouver $\mathcal{R}_{q+1}$. Dans (III.49) (pour $k=q$), la différentielle extérieure du membre de gauche est nulle et $\mathrm{d}\omega_j^{(q)} \geq q+2$ (d'après (III.29) et le fait que $\operatorname{Val} \mathrm{d}\omega_j \geq 2$), donc la différentielle extérieure de la somme est de valuation au moins $q+2$, si bien que toutes les conditions de la propriété (III.52) sont satisfaites, et qu'il existe donc un polynôme p_j en les variables $y_{j'}^{k'}$ tel que $\mathrm{d}z_j^q = \omega_j^{(q)} + \mathrm{d}p_j + \mathcal{O}_{q+2}$. Prenons $y_j^q \triangleq z_j^q - p_j$; la propriété (III.44) se lit sur la relation précédente, et l'on obtient bien des coordonnées en remplaçant z_j^q par cet y_j^q car les p_j ne dépendent d'aucun z_j^q. On a construit les y_j^k demandés dans $\mathcal{R}_{q+1}$; il reste à modifier les z_j^k pour $q+1 \leq k \geq K$. Ceux hérités de $\mathcal{R}_q$ satisfont toujours (III.49), mais seulement $\operatorname{Val}(z_j^k) \geq q+1$; modifions-les pour obtenir $q+2$. Prenons la différentielle extérieure de chaque membre dans (III.49), pour $k \geq q+1$: celle du membre de gauche est nulle, et comme noté plus haut $\mathrm{d}\omega_j^{(k)} \geq k+2 \geq q+2$, donc la valuation de la différentielle extérieure de la somme est au moins égale à $q+2$; on peut, comme plus haut, appliquer la propriété (III.52) à cette somme, ce qui donne un polynôme p_j,k tel que $dz_j^k = \omega_j^{(k)} + \mathrm{d}p_{j,k} + \mathcal{O}_{q+2}$. On remplace z_j^k par $z_j^k - p_{j,k}$.

La propriété $\mathcal{R}_q$ est vraie pour tout $q \in \{0,\ldots,K\}$, et en particulier pour $q = K$. On termine en définissant les y_j^k pour $k \geq K+1$ par $y_j^k = \frac{d}{dt}^{k-K} \bullet y_j^K$. Il est aisé que ceci fait des y_j^k des coordonnées, comme les z_j^k, et que la propriété (III.44) se propage. ■

III-5.3 La fonction Val est bien une valuation sur $\mathcal{A}$, et sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$.

Concernant la fonction Val, la propriété multiplicative établie jusqu'ici est seulement l'inégalité (III.9). L'existence de coordonnées adaptées permet de prouver aisément l'on a en fait, pour tout $p,q \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, l'égalité suivante, qui fait bien de Val une valuation :

$$\mathrm{Val}(pq) \;=\; \mathrm{Val}\, p \;+\; \mathrm{Val}\, q\ . \tag{III.53}$$

Proposition III.13 *L'application* Val : $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}] \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *définit une valuation sur l'anneau* $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$*, et donc a fortiori sur son sous-anneau* $\mathcal{A}$.

Démonstration : Soit $\mathbf{y}$ un système de coordonnées adaptées (voir Définition III.7). D'une part, $h \mapsto h(\mathbf{y})$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]] \to \mathcal{A}$. D'autre part cet isomorphisme envoie $\mathbf{o}$, qui coïncide avec $\mathrm{Val}_{\mathbf{y}}$, sur Val. On a vu (cf. (I.26)) que $\mathbf{o}$ est une valuation sur $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$, donc Val est une valuation sur $\mathcal{A}$, ce qui prouve (III.53) quand p et q sont dans $\mathcal{A}$. S'ils sont dans $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, soit

$$p \;=\; \sum_{k=0}^{K} p_k \frac{d}{dt}^k\ , \quad q \;=\; \sum_{j=0}^{J} p_j \frac{d}{dt}^j\ ,$$

avec $p_k \in \mathcal{A}$ et $q_j \in \mathcal{A}$. Soit $\bar{K}$ le plus grand des entiers k tels que $k + \mathrm{Val}\, p_k = \mathrm{Val}\, p$, et $\bar{\jmath}$ le plus grand j tel que $j + \mathrm{Val}\, q_j = \mathrm{Val}\, q$. On peut écrire $p = p' + p''$, où p' ne comprend que les termes pour $0 \leq k \leq \bar{K}$ et p'' les autres, et de même $q = q' + q''$. Alors $pq = p'q' + p'q'' + p''q' + p''q''$. Par définition, on a $\mathrm{Val}\, p'' > \mathrm{Val}\, p$ et $\mathrm{Val}\, q'' > \mathrm{Val}\, q$. D'après (III.24) et (III.26), ceci entraîne $\mathrm{Val}\,(p'q'' + p''q' + p''q'') > \mathrm{Val}\, p + \mathrm{Val}\, q$. Pour établir (III.53), il suffit donc, d'après (III.25), de montrer que $\mathrm{Val}\,(p'q') = \mathrm{Val}\, p + \mathrm{Val}\, q$. La relation (III.26) implique évidemment $\mathrm{Val}\,(p'q') \geq \mathrm{Val}\, p + \mathrm{Val}\, q$; inversement, le terme de degré $\bar{K} + \bar{\jmath}$ (en $\frac{d}{dt}$) dans $p'q'$ est $p_{\bar{K}} q_{\bar{\jmath}} \frac{d}{dt}^{\bar{K}+\bar{\jmath}}$, ce qui entraîne, puisque $\bar{K} + \mathrm{Val}\, p_{\bar{K}} = \mathrm{Val}\, p$ et $\bar{\jmath} + \mathrm{Val}\, q_{\bar{\jmath}} = \mathrm{Val}\, q$, en utilisant (III.20), l'inégalité $\mathrm{Val}\,(p'q') \leq \mathrm{Val}\, p + \mathrm{Val}\, q$. ■

III-6 Filtration

On va utiliser la valuation définie jusque là pour filtrer chaque[2] $\Lambda^r(\mathcal{A})$ ou chaque $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ définis aux sections II-3 et II-4. Dans la suite, $r = 0,1,2$ sont les seuls cas qui nous intéresseront. Pour $r \geq 1$, il n'y a pas de loi multiplicative interne à $\Lambda^r(\mathcal{A})$ ou $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ mais seulement une structure de module sur $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$, en prenant pour loi externe la composition des opérateurs dans le cas de $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, et l'"application" des opérateurs (la loi $\bullet$, comme en (II.12)) dans le cas de $\Lambda^r(\mathcal{A})$ (ceci en plus de la structure évidente de module sur $\mathcal{A}$).

Pour tous entiers r et k,

$$\begin{aligned} (\Lambda^r(\mathcal{A}))_k &= \{g \in \Lambda^r(\mathcal{A}) / \operatorname{Val} g \geq k\} \\ \text{et} \quad \left(\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)_k &= \{g \in \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] / \operatorname{Val} g \geq k\} \end{aligned} \tag{III.54}$$

sont, d'après (III.26), des sous-$\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module de $\Lambda^r(\mathcal{A})$ et $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ respectivement. On obtient alors une filtration de $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et de $\Lambda^r(\mathcal{A})$:

$$\Lambda^r(\mathcal{A}) = (\Lambda^r(\mathcal{A}))_0 \supset (\Lambda^r(\mathcal{A}))_1 \supset \cdots \supset (\Lambda^r(\mathcal{A}))_k \supset \cdots , \tag{III.55}$$

$$\Lambda^r(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}] = \left(\Lambda^r(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]\right)_0 \supset \left(\Lambda^r(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]\right)_1 \supset \cdots \supset \left(\Lambda^r(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]\right)_k \supset \cdots \tag{III.56}$$

On vient d'établir à la section précédente l'existence –et un moyen de construction– de systèmes de coordonnées adaptées pour la valuation Val. Ces coordonnées établissent un isomorphisme entre $\mathcal{A}$ et $k[[\mathbf{Y}]]$ (cf. le début de la section III-5) qui envoie la valuation Val sur la valuation $\mathbf{o}$ (voir Définition III.7). Cet isomorphisme envoie donc la filtration (III.54) sur la filtration (I.38) (qui se ramène à (I.35) si $r = 0$) :

$$\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]) = (\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]))_0 \supset (\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]))_1 \supset \cdots \supset (\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]))_k \supset \cdots ,$$

2. On pourrait aussi filtrer $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ et considérer, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_k = \{g \in \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] / \operatorname{Val} g \geq k\} .$$

La propriété multiplicative (III.26) de Val fait de chaque $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_k$ un idéal (à gauche et à droite) de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$. On obtient une filtration de $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$:

$$\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}] = \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_0 \supset \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_1 \supset \ldots \supset \Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_k \supset \ldots ,$$

qui "épuise" bien l'anneau, c'est-à-dire que l'intersection de tous les $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_k$ est réduite à 0.

Ceci dit, l'algèbre $\Lambda(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ est bien grande et bien abstraite : les formes différentielles non homogènes ne sont qu'une commodité d'écriture, et il est plus intéressant d'étudier chaque $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ séparément.

et induit donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels entre les quotients

$$\Lambda^r(\mathcal{A})/\,(\Lambda^r(\mathcal{A}))_{k+1} \qquad \text{et} \qquad \Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]])/\,(\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]))_{k+1}\ .$$

Ceci entraîne en particulier la propriété suivante :

Proposition III.14 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{N}$, les quotients*

$$\Lambda^r(\mathcal{A})/\,(\Lambda^r(\mathcal{A}))_{k+1} \qquad et \qquad \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\Big/\left(\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)_{k+1} \tag{III.57}$$

sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. On note respectivement $\aleph_0(r,k)$ et $\aleph(r,k)$ leurs dimensions. Pour tout r,k, on a la relation :

$$\aleph(r,k) \;=\; \sum_{\ell=0}^{k} \aleph_0(r,\ell)\ . \tag{III.58}$$

<u>Démonstration</u> : On déduit de (III.23) que $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]/\,\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_{k+1}$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, à

$$\bigoplus_{\ell=0}^{k} \Lambda^r(\mathcal{A})/\,(\Lambda^r(\mathcal{A}))_{\ell+1}\ .$$

Sous réserve que chaque $\Lambda^r(\mathcal{A})/\,(\Lambda^r(\mathcal{A}))_{\ell+1}$ soit de dimension finie, cela prouve que $\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]/\,\Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_{k+1}$ l'est aussi, et que sa dimension est donnée par (III.58).

D'après les remarques qui précèdent la proposition, en utilisant un quelconque système de coordonnées adaptées, chaque $\Lambda^r(\mathcal{A})/\,(\Lambda^r(\mathcal{A}))_{k+1}$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, à $\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]])/\,\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]])_{k+1}$, lui-même isomorphe, d'après la Proposition I.15, à

$$\bigoplus_{i=0}^{k} (\Lambda^r(\mathbb{R}[\mathbf{Y}]))^{[i]}\ .$$

Comme chaque $\Lambda^r(\mathbb{R}[\mathbf{Y}])^{[i]}$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont la dimension est donnée en (I.30)-(I.31), ceci permet de conclure. ■

Notons que les filtrations (III.55) et (III.56), ainsi que les quotients (III.57), sont définis indépendamment des coordonnées adaptées, et leur dimension est bien définie aussi, indépendamment du choix des coordonnées adaptées, mais il n'y pas, en revanche, de notion de "polynôme homogène" au sens de Val. Le cas de la valuation $\mathbf{o}$ sur $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$ (ou $\Lambda^r(\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]])[\frac{d}{dt}]$) est plus simple : chaque élément du quotient $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]/\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]_{k+1}$ est représenté de manière canonique par un élément particulier de sa classe: un unique polynôme de "degré" (au sens du poids (III.41)) inférieur ou égal à k, ou en d'autres termes $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]/\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]_{k+1}$ est canoniquement isomorphe à $\bigoplus_{i=0}^{k} \mathbb{R}[\mathbf{Y}]^{[i]}$, *qui est naturellement une partie de* $\mathbb{R}[[\mathbf{Y}]]$. On a remarqué dans la démonstration ci-dessus que chaque quotient $\mathcal{A}/\mathcal{A}^{[k+1]}$ est aussi isomorphe à $\bigoplus_{i=0}^{k} \mathbb{R}[\mathbf{Y}]^{[i]}$, mais cet isomorphisme *dépend* du choix des coordonnées adaptées, et les coordonnées adaptées permettent aussi d'envoyer $\bigoplus_{i=0}^{k} \mathbb{R}[\mathbf{Y}]^{[i]}$ sur une partie de $\mathcal{A}$ *qui dépend aussi* du choix des coordonnées adaptées ; autrement dit, pour $g \in \mathcal{A}$, il n'y a pas d'élément de $\mathcal{A}$ privilégié parmi tous ceux qui ne diffèrent de g que par un élément de valuation strictement plus grande que k. Les coordonnées adaptées sont tout de même d'un grand secours pour faire des calculs, ou pour prouver des propriétés comme la suivante, qui est une conséquence du Corollaire I.14.

Proposition III.15 *Soient r et k des entiers positifs et $\omega \in \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ (resp $\omega \in \Lambda^r(\mathcal{A})$) tel que*

$$\mathrm{d}\omega \;=\; \mathcal{O}_{k+1}\ . \tag{III.59}$$

Alors il existe $\eta \in \Lambda^{r-1}(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ (resp. $\eta \in \Lambda^{r-1}(\mathcal{A})$) tel que

$$\omega \;=\; \mathrm{d}\eta \,+\, \mathcal{O}_{k+1}\ . \tag{III.60}$$

<u>*Démonstration*</u> *:* pour le cas $\omega \in \Lambda^r(\mathcal{A})$, ceci est une conséquence directe du Corollaire I.14 et du fait que l'isomorphisme induit par les coordonnées adaptées envoie d sur d et Val sur $\mathbf{o}$. Pour le cas $\omega \in \Lambda^r(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$, si

$$\omega \;=\; \sum_{\ell=0}^{L} \omega_\ell \frac{d}{dt}^{\ell}\ ,$$

il suffit d'appliquer le cas précédent à chaque $\omega_\ell \in \Lambda^r(\mathcal{A})$. $\blacksquare$

Chapitre IV

Application aux équations de la platitude d'un système de contrôle

IV-1 Platitude des systèmes de contrôle, formulation du problème

Les systèmes "différentiellement plats" ont été introduits dans [8], et les auteurs même de ce papier ont remarqué ensuite que le problème de la caractérisation de cette propriété, pour des systèmes d'équations différentielles sous-déterminés, avait été posé dès le début du vingtième siècle.

On prendra la définition suivante, qui est équivalente, via un théorème d'inversion locale, à la définition classique. Voir plus de détails dans [18, §7,Théorème 5] (dans cette référence, on utilise des fonctions C^∞ plutôt que des séries, et par "dynamic linearizable", il faut entendre plat).

Définition IV.1 *On dira qu'un système (II.1)-(II.3) est plat si et seulement si il existe des éléments $h_1,\dots,h_m$ de $\mathcal{A}$ tels que $\{dh_1,\dots,dh_m\}$ soit une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, en tant que $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module.*

Ceci est bien sûr une version locale et formelle (on ne dit rien de la convergence des séries $h_1,\dots,h_m$).

Notons que, d'après cette définition, il est évident que la liberté du $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]$-module $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est une condition *nécessaire* pour la platitude de (II.1)-(II.3). Ceci légitime la seconde hypothèse faite au chapitre précédent, section III-1.

Dans le cas $m = 1$ (systèmes à entrée scalaire), les bases ont un seul élément. Soit $\{\omega\}$ une base. On a déjà noté (fin de la section III-1), que toutes les autres bases s'écrivent $\{\lambda\omega\}$, $\lambda \in \mathcal{A}$, $\lambda(0) \neq 0$. Le système est donc plat si et seulement si il existe un $h \in \mathcal{A}$ et un $\lambda \in \mathcal{A}$, $\lambda(0) \neq 0$, tels que $\mathrm{d}h = \lambda\omega$. Le théorème de Frobenius nous dit qu'il existe ce λ et ce h si et seulement si $\mathrm{d}\omega \wedge \omega = 0$. Comme ω peut être construit très explicitement, cela donne une caractérisation aisée de la platitude pour les systèmes à une seule entrée.

Le cas à une seule entrée est de fait bien connu, voir [5], et aussi [4] dans un langage différent.

Dans le cas $m \geq 2$, en revanche, il est très difficile de décider en général si un système est plat ou non. Citons quelques travaux dans ce sens. Les systèmes à *deux* contrôles, *linéaires* par rapport aux contrôles (en dehors de certaines singularités), sont aussi traités dans [4], comme remarqué dans [17]. On y trouve un condition pour que ces systèmes soient plats, et les systèmes de cette classe ne satisfaisant pas cette condition ne sont pas plats. En dehors de ce cas, on peut trouver dans la littérature des travaux qui donnent des classes de systèmes plats, en construisant explicitement, pour ces systèmes, les fonctions $h_1, \ldots, h_m$. Face à un système pour lequel on ne sait pas construire ces fonctions, il est difficile de démontrer qu'il n'est *pas* plat. Une condition nécessaire générale ("critère de surface réglée") est connue, mais elle est loin d'être suffisante : elle est satisfaite par de nombreux systèmes dont on ne sait prouver si ils sont plats; notons tout de même que les systèmes ne satisfaisant pas cette condition sont génériques. Pour un système qui satisfait cette condition, on peut en principe décider par un processus fini si il existe des h_i satisfaisant aux conditions *et dépendant d'un nombre fini de variable fixé à l'avance*, mais en l'absence d'une borne a priori sur le nombre de variables nécessaires, cela est insuffisant pour montrer qu'un système n'est pas plat.

Pour une bibliographie plus complète, voir [18], ou [16], ou aussi [13].

IV-2 Réécriture du problème

La proposition suivante est la Proposition 3 de [1, §4] (où, à nouveau, on utilise des fonctions C^∞ plutôt que des séries, et par "linearizing Pfaffian system", il faut entendre base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$). On note par $\bullet$ la version matricielle de la loi "externe" décrite à la section II-2, qui consiste donc à appliquer les opérateurs différentiels qui constituent la matrice P aux éléments du vecteur colonne Ω, qui sont des formes.

Proposition IV.2 *Soit Ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, supposé libre. (II.1)-(II.3) est plat si et seulement si il existe $P \in \mathcal{A}[\frac{d}{dt}]^{m\times m}$ inversible dans $\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]^{m\times m}$ et tel que*

$$\mathrm{d}(P \bullet \Omega) = 0 \ . \tag{IV.1}$$

Le démonstration de ceci tient dans le fait qu'étant donnée une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, on obtient toutes le autres en lui appliquant tous les opérateurs inversibles P.

Le seconde équation de (IV.1) peut se réécrire

$$\mathrm{d}P \bullet \Omega + P \bullet \mathrm{d}\Omega = 0$$

ce qui implique, P étant inversible,

$$\mathrm{d}\Omega \ = \ -P^{-1} \bullet (\mathrm{d}P \bullet \Omega) \ = \ \left(-P^{-1} \wedge \mathrm{d}P\right) \bullet \Omega.$$

Si (IV.1) est vérifié, il existe donc une matrice $\Pi \in \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ telle que $\mathrm{d}\Omega = \Pi \bullet \Omega$: elle est donnée par

$$\Pi = -P^{-1} \wedge \mathrm{d}P, \tag{IV.2}$$

et en différentiant ceci, on obtient $\mathrm{d}\Pi = -\mathrm{d}P^{-1} \wedge \mathrm{d}P$, or $\mathrm{d}P^{-1} = -P^{-1} \wedge \mathrm{d}P \wedge P^{-1}$, d'où $\mathrm{d}\Pi = \Pi \wedge \Pi$.

Comme (IV.2) est équivalent, si P est inversible, à $\mathrm{d}P + P \wedge \Pi = 0$, on a montré la proposition suivante, que l'on trouve aussi, avec des notations différentes, dans [6] :

Proposition IV.3 *Soit Ω une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, supposé libre. (II.1)-(II.3) est plat si et seulement si il existe $\Pi \in \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ qui*

1. *satisfasse les équations suivantes :*

$$\mathrm{d}\Omega \ - \ \Pi \bullet \Omega \ = \ 0 \ , \tag{IV.3}$$
$$\mathrm{d}\Pi \ - \ \Pi \wedge \Pi \ = \ 0 \ , \tag{IV.4}$$

   et

2. *soit telle qu'il existe $P \in \left(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ inversible dans $\left(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ et vérifiant $\mathrm{d}P + P \wedge \Pi = 0$.*

IV-3 Condition nécessaire : système d'équations sur Π

La condition 2 de la proposition IV.3 est difficile à vérifier à plus d'un titre. D'une part, il est difficile de caractériser les opérateurs $P \in \left(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ qui sont inversibles dans $\left(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$. D'autre part, il est encore moins aisé de traduire cette inversibilité en une condition sur l'opérateur Π qui donne naissance à P. Ce problème est étudié dans l'article récent [6].

Dans ce qui suit, nous allons mettre de côté la seconde condition de la Proposition IV.3, c'est-à-dire l'équation (IV.2), pour étudier seulement la condition 1, et tenter de caractériser l'existence d'une solution Π au système d'équations (IV.3)-(IV.4).

Cette existence n'est, répétons le, qu'une condition *nécessaire* pour la platitude. Il se pourrait bien sûr que cette condition nécessaire soit inopérante, c'est-à-dire que le système d'équations (IV.3)-(IV.4) ait une solution Π quel que soit le système (II.1)-(II.3) considéré. Nous allons donner au moins un exemple qui montre que cette condition nécessaire peut ne pas être satisfaite. Dans cet exemple, nous aurons besoin du lemme suivant, qui concerne une version "scalaire" de (IV.4).

Lemme IV.4 *Si $\pi \in \Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ vérifie $\mathrm{d}\pi - \pi \wedge \pi = 0$, alors π est de degré au plus 1 par rapport à $\frac{d}{dt}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit $\pi = \pi_0 + \pi_1 \frac{d}{dt}$ avec π_0 et π_1 dans $\Lambda^1(\mathcal{A})$.*

Démonstration : Soit $\pi = \sum_{j=0}^{J} \pi_j \frac{d}{dt}^j$. Supposons $J \geq 2$. Le coefficient de $\frac{d}{dt}^{2J}$ dans $\mathrm{d}\pi - \pi \wedge \pi$ est $-\pi_J \wedge \pi_J$, qui est automatiquement nul, mais, comme $2J - 1 > J$, le coefficient de $\frac{d}{dt}^{2J-1}$ est égal à $-\pi_J \wedge \dot{\pi}_J$, et l'on a donc $\pi_J \wedge \dot{\pi}_J = 0$. Ceci entraîne $\pi_J = 0$ car $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est libre[1]. ■

Exemple. Pour des systèmes à une entrée scalaire ($m = 1$), une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$ est constituée d'un seul élément ω (voir section IV-1), et les équations (IV.3)-(IV.4) sont scalaires : Π est une matrice 1×1, c'est-à-dire un élément de $\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]$ que l'on note simplement π. Alors (IV.4) entraîne, au vu du lemme ci-dessus, que π s'écrit $\pi = \pi_0 + \pi_1 \frac{d}{dt}$ avec π_0 et π_1 dans $\Lambda^1(\mathcal{A})$, et (IV.3) s'écrit $\mathrm{d}\omega = \pi_0 \wedge \omega + \pi_1 \wedge \dot{\omega}$, si bien que l'existence d'un π solution de (IV.3)-(IV.4) entraîne $\mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \dot{\omega} = 0$. Il suffit donc de donner un exemple de système pour lequel $\mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \dot{\omega}$ n'est pas nul. C'est

1. Si la forme π_J ne s'annule pas en zéro, ceci entraîne qu'il existe $\lambda \in \mathcal{A}$ tel que $\dot{\pi}_J = \lambda \pi_J$ et donc π_J est un élément de torsion car $(\frac{d}{dt} - \lambda) \bullet \pi_J = 0$. Si la forme π_J s'annule en zéro, ce raisonnement ne fonctionne plus, mais on peut tout de même montrer que $\pi_J \wedge \dot{\pi}_J = 0$ entraîne $\pi_J = 0$ en décomposant π_J sur une base.

le cas de

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + \frac{1}{2}u^2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ \dot{x}_3 & = & u \end{array}$$

$(n = 3,\, m = 1)$. On prend comme base

$$\omega \;=\; \mathrm{d}x_1 + \dot{u}\mathrm{d}x_2 - u\mathrm{d}x_3\,. \tag{IV.5}$$

Alors

$$\dot{\omega} \;=\; (1 + {x_2}^{(4)})\,\mathrm{d}x_2\,, \quad \ddot{\omega} \;=\; u^{(3)}\,\mathrm{d}x_2 + (1 + \ddot{u})\,\mathrm{d}x_3\,,$$

ce qui permet de vérifier que ω engendre $\Lambda^1(\mathcal{A})$ en exprimant $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$ et $\mathrm{d}x_3$ comme des combinaisons linéaires de ω, $\dot{\omega}$ et $\ddot{\omega}$ à coefficients dans $\mathcal{A}$, et

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\omega & = & \mathrm{d}\dot{u} \wedge \mathrm{d}x_2 - \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x_3\,, \\ \mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \dot{\omega} & = & -(1 + \ddot{u})\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2\,, \end{array} \tag{IV.6}$$

qui est clairement une 4-forme non nulle.

Nature du système d'équations sur Π . Détaillons les équations (IV.3)-(IV.4). Ω est un vecteur colonnes de formes $\omega_1, \ldots, \omega_m$ qui ont été construites explicitement, et forment une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$. $\Pi \in \big(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\big)^{m\times m}$ est l'inconnue ; pour mieux comprendre les équations, ramenons Π à une famille de fonctions (c'est-à-dire d'éléments de $\mathcal{A}$) qui le définissent. En appelant J le plus grand exposant de $\frac{d}{dt}$ qui figure dans les éléments de Π, cette matrice s'écrit :

$$\Pi = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{J} \pi_{1,1,j} \frac{d}{dt}^j & \cdots & \displaystyle\sum_{j=0}^{J} \pi_{1,m,j} \frac{d}{dt}^j \\ \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{J} \pi_{m,1,j} \frac{d}{dt}^j & \cdots & \displaystyle\sum_{j=0}^{J} \pi_{m,m,j} \frac{d}{dt}^j \end{pmatrix}, \tag{IV.7}$$

et on peut aussi décomposer chaque forme $\pi_{p,q,j} \in \Lambda(\mathcal{A})$ sur la base $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ et écrire, pour tout $(p,q,j) \in \{1, \ldots, m\}^2 \times \{0, \ldots, J\}$, K étant un entier qui dépend de Π,

$$\pi_{p,q,j} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{K} a_{p,q,j,i,k}\, \omega_i^{(k)} \tag{IV.8}$$

avec $a_{p,q,j,i,k} \in \mathcal{A}$ pour tout p,q,j,i,k.

On peut alors voir les équations (IV.3)-(IV.4) comme des relations sur la collection de fonctions $a_{p,q,j,i,k}$. L'équation (IV.3) est simplement une équation non différentielle (linéaire) sur ces fonctions, tandis que (IV.4) est une équation différentielle d'ordre J sur ces mêmes fonctions. Comme J n'est pas fixé a priori, (IV.3)-(IV.4) est un système d'EDP d'un ordre qui n'est pas fixé à l'avance, et de plus le nombre de fonctions inconnues n'est pas non plus majoré à l'avance.

Si l'on fixe J et K a priori, de manière arbitraire, (IV.3)-(IV.4) se traduit par un système d'EDP "classique", dont on peut en principe décider si il a des solutions ou non. Le difficulté est alors que, si le système n'admet pas de solutions pour certaines valeurs de J et K, il faut passer à des valeurs supérieures.

Il est donc tentant d'analyser (IV.3)-(IV.4) sans préjuger de la valeur de ces entiers, et c'est le but de la présente note. Comme on l'a remarqué, ceci conduit à un système d'EDP d'ordre potentiellement infini en un nombre de fonctions potentiellement infini.

Cessons donc d'exiger que le nombre de variables ou de fonctions soit fini, et observons naïvement la situation. Il suffit de remplacer les entiers K et J par $+\infty$, et de chercher les $a_{p,q,j,i,k}$ non pas dans $\mathcal{A}$, mais dans ce que l'on a noté $\mathbb{R}[[[\Upsilon]]]$ à la section I-2.2. Rappelons que Υ est défini en (II.4), et qu'un élément de $\mathbb{R}[[[\Upsilon]]]$ est une série "très formelle" en l'infinité de variables $x,u,\dot{u},\ldots$, alors que l'on demande à chaque élément de $\mathcal{A} = \mathbb{R}[[\Upsilon]]$ de ne faire intervenir que des monômes en un nombre fini de variables prises parmi $x,u,\dot{u},\ldots$.

On a vu que la multiplication de deux séries très formelles ne pose pas de problème particulier puisque le coefficient de chaque monôme est une somme finie de produits finis de nombres. Les membres de gauche des équations (IV.3)-(IV.4) contiennent non seulement des multiplications, mais aussi des applications de l'opérateur $\frac{d}{dt}$, et il n'est pas vrai, si l'on autorise des sommes infinies, que chaque coefficient du membre de gauche de (IV.4), par exemple, ne dépende que d'un nombre fini de coefficients définissant Π. Pour s'en convaincre, il suffit d'essayer de donner un sens à l'équation

$$\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \frac{d}{dt}^j\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \frac{d}{dt}^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \frac{d}{dt}^j\right) \tag{IV.9}$$

où chaque α_j, β_j ou γ_j est dans $\mathbb{R}[[[\Upsilon]]]$: même l'équation sur le premier coefficient du membre de droite, γ_0, s'écrit formellement $\gamma_0 = \sum \alpha_j {\beta_0}^{(j)}$, somme infinie à laquelle on ne peut donner de sens a priori car, sauf exceptions, chaque coefficient de

$\sum \alpha_j {\beta_0}^{(j)}$ (vu comme une série très formelle en $x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m,\dot{u}_1,\dots,\dot{u}_m,\dots\dots$) est lui-même une somme infinie de nombres, dont il faudrait analyser la convergence.

Au lieu de cela, on va utiliser la valuation définie au chapitre III pour analyser le système (IV.3)-(IV.4). En un sens, les coordonnées adaptées décrites à la section III-5, sont des coordonnées privilégiées telles que, si l'on considère les α_j, β_j et γ_j comme des séries en ces coordonnées (plutôt qu'en $x,u,\dot{u}..$), on peut donner un sens à (IV.9) car, précisément, chaque coefficient de $\sum \alpha_j {\beta_0}^{(j)}$, est une somme finie de produits finis d'un nombre fini de coefficients parmi ceux définissant les séries α_j et β_0. Cette remarque est sans doute plus pittoresque et éclairante que la construction générale qui suit, où l'on ne parle pas de coordonnées adaptées, ni de séries très formelles.

IV-4 Filtration du système d'équations sur Π

Notons

$$\mathcal{Q}_\infty \triangleq \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m} , \tag{IV.10}$$

et définissons les applications Φ et Ψ par

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : & \mathcal{Q}_\infty & \to & \left(\Lambda^1(\mathcal{A})\right)^m \\ & \Pi & \mapsto & \mathrm{d}\Omega - \Pi \bullet \Omega \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rrcl} \Psi : & \mathcal{Q}_\infty & \to & \left(\Lambda^2(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m} \\ & \Pi & \mapsto & \mathrm{d}\Pi - \Pi \wedge \Pi \end{array} . \tag{IV.11}$$

Le système (IV.3)-(IV.4) s'écrit évidemment

$$\Phi(\Pi) = 0 , \quad \Psi(\Pi) = 0 . \tag{IV.12}$$

Par ailleurs, les deux applications Φ et Ψ satisfont les propriétés suivantes :

Proposition IV.5 *Les applications Φ et Ψ vérifient*[2]*, pour tout $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ et tout entier j :*

$$\left.\begin{array}{rcl} \Phi(\Pi + \mathcal{O}_j) & = & \Phi(\Pi) + \mathcal{O}_{j+1} , \\ \Psi(\Pi + \mathcal{O}_j) & = & \Psi(\Pi) + \mathcal{O}_j . \end{array}\right\} \tag{IV.13}$$

Démonstration : On a, pour tout Π et Δ dans $\mathcal{Q}_\infty$, $\Phi(\Pi+\Delta) = \Phi(\Pi) + \Delta \bullet \Omega$ et $\Psi(\Pi+\Delta) = \Psi(\Pi) + \mathrm{d}\Delta - \Delta\wedge\Pi - \Pi\wedge\Delta - \Delta\wedge\Delta$. Si $\mathrm{Val}\,\Delta \geq j$, on a, d'après

2. On rappelle (voir section III-6) que les équations (IV.13) signifient que, pour tout $\Pi' \in \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ tel que $\mathrm{Val}(\Pi - \Pi') \geq j$, on a nécessairement $\mathrm{Val}(\Phi(\Pi') - \Phi(\Pi)) \geq j+1$ et $\mathrm{Val}(\Psi(\Pi') - \Psi(\Pi)) \geq j$.

(III.31)-(III.35), $\mathrm{Val}(\mathrm{d}\Delta - \Delta\wedge\Pi - \Pi\wedge\Delta - \Delta\wedge\Delta) \geq j$, et par ailleurs, comme $\mathrm{Val}\,\Omega \geq 1$ (parce que Ω est un vecteur de 1-formes), $\mathrm{Val}(\Delta\bullet\Omega) \geq j+1$. ■

Les quotients étant ceux évoqués dans la Proposition III.14, on note[3], pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}_k \;\triangleq\; \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]\Big/\,\Lambda^1(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]_{k+1}\right)^{m\times m}\;, \tag{IV.14}$$

$$\mathcal{T}_k \;\triangleq\; \left(\Lambda^1(\mathcal{A})\Big/\,\Lambda^1(\mathcal{A})_{k+2}\right)^{m} \times \left(\Lambda^2(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]\Big/\,\Lambda^2(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]_{k+1}\right)^{m\times m}, \tag{IV.15}$$

$$\mathcal{T}_\infty \;\triangleq\; \left(\Lambda^1(\mathcal{A})\right)^{m} \times \left(\Lambda^2(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}\;. \tag{IV.16}$$

D'après la Proposition III.14, pour $k<\infty$, $\mathcal{Q}_k$ et $\mathcal{T}_k$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et on a plus précisément

$$\mathcal{Q}_k \;\simeq\; \mathbb{R}^{\left(m^2\,\aleph(1,k)\right)}\;,\quad \mathcal{T}_k \simeq \mathbb{R}^{\left(m\,\aleph_0(1,k+1)\,+\,m^2\,\aleph(2,k)\right)}\;.$$

La Proposition IV.5 signifie qu'il existe, pour tout k ($k=j-1$), des applications

$$\Phi_k:\ \mathcal{Q}_k \to \left(\Lambda^1(\mathcal{A})/\,\Lambda^1(\mathcal{A})_{k+2}\right)^m \quad \text{et} \quad \Psi_k:\ \mathcal{Q}_k \to \left(\Lambda^2(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]/\,\Lambda^2(\mathcal{A})[\tfrac{d}{dt}]_{k+1}\right)^{m\times m}$$

qui font commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_\infty & \xrightarrow{\ \Phi\times\Psi\ } & \mathcal{T}_\infty \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{Q}_k & \xrightarrow{\ \Phi_k\times\Psi_k\ } & \mathcal{T}_k \end{array} \tag{IV.17}$$

On peut donc associer à toute solution $\Pi\in\mathcal{Q}_\infty$ de (IV.12) son représentant $\mathit{\Pi}\in\mathcal{Q}_k$ dans le quotient $\mathcal{Q}_k$, qui satisfait **l'équation tronquée à l'ordre** k :

$$\Phi_k(\mathit{\Pi}) = 0\;,\quad \Psi_k(\mathit{\Pi}) = 0\;. \tag{IV.18}$$

Rien n'indique en revanche qu'un $\mathit{\Pi}\in\mathcal{Q}_k$ solution de (IV.18) soit le “début” d'une solution de (IV.12).

3. La définition de $\mathcal{Q}_k$ est cohérente avec (IV.10) car $\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]_{+\infty} = \{0\}$.

Passage de l'ordre k à l'ordre $k+1$. Un début de réponse à cette interrogation consiste à déterminer si un $\Pi \in \mathcal{Q}_k$ solution de (IV.18) "se prolonge" en un $\Pi' \in \mathcal{Q}_{k+1}$ solution de (IV.18) où l'on remplace k par $k+1$. Formalisons ceci. Soit

$$\mathcal{S}_k \;\triangleq\; \{\, \Pi \in \mathcal{Q}_k \,,\, \Phi_k(\Pi) = 0 \text{ et } \Psi_k(\Pi) = 0 \,\} \tag{IV.19}$$

la partie de $\mathcal{Q}_k$ qui est solution de (IV.18), ce qui se traduit par la suite exacte suivante, pour tout k (i_k est l'injection canonique $\mathcal{S}_k \hookrightarrow \mathcal{Q}_k$) :

$$\{0\} \;\rightarrow\; \mathcal{S}_k \;\xrightarrow{\;i_k\;}\; \mathcal{Q}_k \;\xrightarrow{\;\Phi_k \times \Psi_k\;}\; \mathcal{T}_k \quad . \tag{IV.20}$$

Notons au passage que $\mathcal{S}_k$ est une sous-variété algébrique de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{Q}_k$ puisque (IV.18) se traduit par $m\,\aleph_0(1,k+1) \;+\; m^2\,\aleph(2,k)$ équations algébriques en $m^2\,\aleph(1,k)$ coefficients des séries formelles définissant Π. Voyons maintenant le passage de $\mathcal{S}_k$ à $\mathcal{S}_{k+1}$. $\mathcal{Q}_k$ est un quotient de $\mathcal{Q}_{k+1}$, et la Proposition IV.5 entraîne que la projection naturelle $\mathcal{Q}_{k+1} \rightarrow \mathcal{Q}_k$ envoie $\mathcal{S}_{k+1}$ dans $\mathcal{S}_k$, si bien que sa restriction à $\mathcal{S}_{k+1}$ définit $\rho_k\,:\;\mathcal{S}_{k+1} \rightarrow \mathcal{S}_k$. $\mathcal{T}_k$ étant également un quotient de $\mathcal{T}_{k+1}$, on peut écrire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{0\} & \rightarrow & \mathcal{S}_{k+1} & \hookrightarrow & \mathcal{Q}_{k+1} & \xrightarrow{\;\Phi_{k+1}\times\Psi_{k+1}\;} & \mathcal{T}_{k+1} \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_k} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\{0\} & \rightarrow & \mathcal{S}_k & \hookrightarrow & \mathcal{Q}_k & \xrightarrow{\;\Phi_k \times \Psi_k\;} & \mathcal{T}_k \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array} \tag{IV.21}$$

Notion d'intégrabilité très formelle. On est maintenant ramené à une situation familière. Dans la théorie de l'intégrabilité des systèmes d'EDP (voir [2, 19]), on a coutume de dire qu'un système est formellement intégrable si et seulement si, lorsqu'on calcule une série formelle solution, les polynômes solution à l'ordre k se prolongent tous en un polynôme de degré immédiatement supérieur solution à l'ordre $k+1$, ou, suivant le vocabulaire de l'appendice de [15], que tout polynôme solution à l'ordre k est "fortement prolongeable". Dans ces références, la notion d'ordre est l'ordre de différentiation, qui revient a prendre la valuation classique sur les séries formelles, mais l'on obtient un diagramme exactement semblable à (IV.21), et l'on dit (voir la condition (5) (page 397) de [2, Chap. IX], ou la Définition 9 dans [19, Chap. III]), que le système d'équations est formellement intégrable si et seulement si chaque ρ_k est surjectif.

Ici, l'étude est seulement locale en un point (dans les références citées, on a cette situation au dessus de chaque point), et la valuation est différente de celle définie par les ordres de dérivation. La situation est toutefois très semblable, quoique plus formelle encore vu que le nombre de variables est potentiellement infini. On dira donc que le système (IV.12) est **très formellement intégrable** si toutes les applications ρ_k sont surjectives.

IV-5 Résultat principal: intégrabilité (très) formelle

Théorème IV.6 (Intégrabilité très formelle de (IV.3)-(IV.4)) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et tout* $\Pi \in \mathcal{S}_k$*, il existe* $\Pi' \in \mathcal{S}_{k+1}$ *tel que* $\rho_k(\Pi') = \Pi$*.*

On aurait pu donner une version de ce résultat qui fasse intervenir beaucoup moins de notations, et qui est évidement équivalente :

Théorème IV.7 *Pour tout* $j \in \mathbb{N}$ *et tout* $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ *tel que* $\Phi(\Pi) = \mathcal{O}_{j+1}$ *et* $\Psi(\Pi) = \mathcal{O}_j$*,*
il existe $\Pi' \in \mathcal{Q}_\infty$ *tel que* $\Pi' = \Pi + \mathcal{O}_j$ *et*

$$\Phi(\Pi') = \mathcal{O}_{j+2}\,, \qquad \Psi(\Pi') = \mathcal{O}_{j+1}\,.$$

Le fait que ces deux formulations sont équivalentes est une évidence. Avant d'établir le Théorème IV.6, on donne deux lemmes utiles.

Lemme IV.8 *Pour tout entier* j*, si* $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ *est tel que* $\mathrm{d}\Pi - \Pi \wedge \Pi = \mathcal{O}_j$ *alors il vérifie aussi* $\mathrm{d}\,(\Pi \wedge \Pi) = \mathcal{O}_{j+1}$*.*

Démonstration : $\mathrm{d}\Pi = \Pi \wedge \Pi + \mathcal{O}_j$ et $\Pi = \mathcal{O}_1$ entraînent $\mathrm{d}\Pi \wedge \Pi = \Pi \wedge \Pi \wedge \Pi + \mathcal{O}_{j+1}$ et $\Pi \wedge \mathrm{d}\Pi = \Pi \wedge \Pi \wedge \Pi + \mathcal{O}_{j+1}$; comme $\mathrm{d}\,(\Pi \wedge \Pi) = \mathrm{d}\Pi \wedge \Pi - \Pi \wedge \mathrm{d}\Pi$, on obtient bien la conclusion du lemme. ■

Lemme IV.9 *Pour tout entier* j*, si* $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ *est tel que* $\mathrm{d}\Pi - \Pi \wedge \Pi = \mathcal{O}_j$ *et* $\mathrm{d}\Omega - \Pi \bullet \Omega = \mathcal{O}_j$*, alors il vérifie aussi* $\mathrm{d}\,(\Pi \bullet \Omega) = \mathcal{O}_{j+1}$*.*

Démonstration : les deux relations vérifiées par Π ainsi que le fait, vrai pour toutes 1-formes, que $\Pi = \mathcal{O}_1$ et $\Omega = \mathcal{O}_1$ entraînent $\mathrm{d}\Pi \bullet \Omega = (\Pi \wedge \Pi) \bullet \Omega + \mathcal{O}_{j+1}$ et $\Pi \bullet \mathrm{d}\Omega = \Pi \bullet (\Pi \bullet \Omega) + \mathcal{O}_{j+1}$; comme $(\Pi \wedge \Pi) \bullet \Omega = \Pi \bullet (\Pi \bullet \Omega)$ et $\mathrm{d}\,(\Pi \bullet \Omega) = \mathrm{d}\Pi \bullet \Omega - \Pi \bullet \mathrm{d}\Omega$, on obtient bien la conclusion du lemme. ■

Démonstration du Théorème IV.6 . Soit $\mathit{\Pi} \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{Q}_k$ et $\Pi \in \mathcal{Q}_\infty$ un représentant de $\mathit{\Pi}$. Le lemme IV.8, avec $j = k+1$, entraîne $\mathrm{d}\,(-\mathrm{d}\Pi + \Pi \wedge \Pi) = \mathcal{O}_{k+2}$. Il existe donc, d'après la proposition III.15, un $\Sigma \in \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ tel que

$$\Sigma \;=\; \mathcal{O}_{k+1} \quad \text{et} \quad -\,\mathrm{d}\Pi + \Pi \wedge \Pi \;=\; \mathrm{d}\Sigma + \mathcal{O}_{k+2}\ .$$

Alors $\Pi + \Sigma$ vérifie

$$\mathrm{d}\,(\Pi + \Sigma) \;-\; (\Pi + \Sigma) \wedge (\Pi + \Sigma) \;\;=\;\; \mathcal{O}_{k+2} \tag{IV.22}$$

et aussi, puisque $\Sigma \bullet \Omega = \mathcal{O}_{k+2}$ dès lors que $\Sigma = \mathcal{O}_{k+1}$,

$$\mathrm{d}\Omega \;-\; (\Pi + \Sigma) \bullet \Omega \;\;=\;\; \mathcal{O}_{k+2}\ . \tag{IV.23}$$

D'après ces deux relations, le lemme IV.9, avec $j = k+2$ entraîne

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{d}\Omega - (\Pi + \Sigma) \bullet \Omega) \;\;=\;\; \mathcal{O}_{k+3}\ ,$$

et donc l'existence de $\Gamma \in \left(\Lambda^1(\mathcal{A})\right)^m$ tel que

$$\begin{aligned} &\Gamma \;=\; \mathcal{O}_{k+2}\ , \\ &\mathrm{d}\Omega - (\Pi + \Sigma) \bullet \Omega \;=\; \mathrm{d}\Gamma + \mathcal{O}_{k+3}\ . \end{aligned}$$

Puisque Ω est une base de $\Lambda^1(\mathcal{A})$, il existe un (unique) $A \in \left(\mathcal{A}[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ tel que $\Gamma = A \bullet \Omega$, et $A = \mathcal{O}_{k+1}$. Les relations ci-dessus entraînent

$$\mathrm{d}\Omega \;-\; (\Pi + \Sigma) \bullet \Omega \;-\; \mathrm{d}\,(A \bullet \Omega) \;\;=\;\; \mathcal{O}_{k+3}\ ,$$

et finalement, vu que $A \bullet \mathrm{d}\Omega = \mathcal{O}_{k+3}$,

$$\mathrm{d}\Omega \;-\; (\Pi + \Sigma + \mathrm{d}A) \bullet \Omega \;\;=\;\; \mathcal{O}_{k+3}\ .$$

On aussi, d'après (IV.22),

$$\mathrm{d}\,(\Pi + \Sigma + \mathrm{d}A) \;-\; (\Pi + \Sigma + \mathrm{d}A) \wedge (\Pi + \Sigma + \mathrm{d}A) \;\;=\;\; \mathcal{O}_{k+2}$$

car la contribution de $\mathrm{d}A$ au premier terme est nulle et sa contribution au second est de valuation au moins $k+2$ car $\Pi + \Sigma + \mathrm{d}A$ est de valuation au moins 1. Si l'on prend alors pour $\mathit{\Pi}'$ la classe de $\Pi + \Sigma + \mathrm{d}A$ dans le quotient $\mathcal{Q}_{k+1}$, on a clairement $\mathit{\Pi}' \in \mathcal{S}_{k+1}$. ■

IV-6 Interprétation des résultats

Dans le cas de systèmes d'EDP (en un nombre fini de variables), l'intégrabilité formelle en un point entraîne tautologiquement l'existence d'une série formelle solution (par exemple le théorème 4.2 de [15, appendice, §4] est une tautologie si l'on ôte "convergente au voisinage de 0") puisque construire des polynômes de degrés croissants dont les termes de mêmes degrés coïncident revient au même que définir une série formelle par ses sommes finies de degré croissant. Des efforts supplémentaires sont requis pour montrer que, dans le cas de données analytiques, on peut choisir une série convergente. En termes plus savants, la limite projective des ensembles de polynômes de degrés croissants est l'ensemble des séries formelles, et non l'ensemble des séries convergentes. Bien sûr, s'il n'existe pas de série formelle solution, alors il n'existe pas de solution tout court, ni analytique ni même C^∞.

Dans notre cas, quelle est la conséquence de la surjectivité de chaque ρ_k sur les solution du système (IV.12) lui-même ? Il est facile de voir que cette surjectivité permet de définir un objet "très formel" qui soit "solution". Cet objet n'est pas en général un élément de $\left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$, mais de ce que l'on pourrait noter $\left(\Lambda^1(\mathbb{R}[[[\Upsilon]]])[[\frac{d}{dt}]]\right)^{m\times m}$, c'est-à-dire (cf. la fin de la section IV-3) que cet objet Π solution s'écrit comme en (IV.7)-(IV.8), mais avec $J = K = +\infty$, chaque $a_{p,q,j,i,k}$ étant une série très formelle et non pas formelle, c'est-à-dire $a_{p,q,j,i,k} \in \mathbb{R}[[[\Upsilon]]]$ au lieu de $a_{p,q,j,i,k} \in \mathcal{A}$.

On vient de prouver qu'il existe toujours un tel objet, mais il reste du travail pour décider si il existe un "vrai" $\Pi \in \left(\Lambda^1(\mathcal{A})[\frac{d}{dt}]\right)^{m\times m}$ solution de (IV.12). En revanche, si pour certains systèmes il n'existait pas un tel objet, on aurait pu affirmer que (IV.12) n'a pas de solution.

Bibliographie

[1] E. Aranda-Bricaire, C. H. Moog, and J.-B. Pomet, *An infinitesimal Brunovsky form for nonlinear systems with applications to dynamic linearization*, in Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions (Warsaw, 1993), vol. 32 of Banach Center Publications, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995, pp. 19–33.

[2] R. L. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmitt, and P. A. Griffiths, *Exterior Differential Systems*, vol. 18 of Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer-Verlag, 1991.

[3] R. L. Bryant and P. A. Griffiths, *Characteristic cohomology of differential systems. I. General theory*, J. Amer. Math. Soc., 8 (1995), pp. 507–596.

[4] É. Cartan, *Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles*, J. für reine und angew. Math., 145 (1915), pp. 86–91.

[5] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino, *On dynamic feedback linearization*, Syst. & Control Lett., 13 (1989), pp. 143–151.

[6] V. N. Chetverikov, *Flat control systems and deformations of structures on diffieties*. Preprint, Jan. 2002.

[7] M. Fliess and S. T. Glad, *An algebraic approach to linear and nonlinear control*, in Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications, H. L. Trentelman and J. C. Willems, eds., vol. 14 of PSCT, Birkhäuser, 1993, pp. 223–265.

[8] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon, *Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 315 (1992), pp. 619–624.

[9] ——, *Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 317 (1993), pp. 981–986.

[10] J. Johnson, *Differential dimension polynomials and a fundamental theorem on differential modules*, Amer. J. Math., 91 (1969), pp. 239–248.

[11] ——, *Kähler differentials and differential algebra*, Ann. of Math. (2), 89 (1969), pp. 92–98.

[12] I. S. Krasil'shchik, V. V. Lychagin, and A. M. Vinogradov, *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, vol. 1 of Adv. Stud. on Contemporary Math., Gordon & Breach Sci. Publ., 1986.

[13] A. Kumpera, *Flag systems and ordinary differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 177 (1999), pp. 315–329.

[14] S. Lang, *Algebra*, vol. 211 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, third ed., 2002.

[15] B. Malgrange, *Equations de Lie, II*, J. Differential Geom., 7 (1972), pp. 117–141.

[16] P. Martin, R. M. Murray, and P. Rouchon, *Flat systems, equivalence and feedback*, in Advances in the control of nonlinear systems (Murcia, 2000), vol. 264 of Lect. Notes in Contr. & Inform. Sci., Springer, London, 2001, pp. 5–32.

[17] P. Martin and P. Rouchon, *Feedback linearization and driftless systems*, Math. of Control, Signals & Systems, 7 (1994), pp. 235–254.

[18] J.-B. Pomet, *A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization*, in Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions (Warsaw, 1993), vol. 32 of Banach Center Publications, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995, pp. 319–339.

[19] J.-F. Pommaret, *Partial Differential Equations and Group Theory*, vol. 293 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1994.

[20] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra. Vol. II*, vol. 29 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2 ed., 1975. Reprint of the 1960 edition.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399